Feuille d'exercices n°24

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (**)

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Résoudre en $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = \mathrm{A}$.

Corrigé : On a $\quad \chi_{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \mathrm{X}-5 & -3 \\ -1 & \mathrm{X}-3 \end{vmatrix} = \mathrm{X}^2 - 8\mathrm{X} + 12 = (\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-6)$

Par condition suffisante, la matrice A est diagonalisable. On a

$$(x,y) \in \mathrm{E}_2(\mathrm{A}) \iff (\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_2)\mathrm{X} = 0 \iff x + y = 0 \iff (x,y) = x(1,-1)$$

et
$$(x,y) \in \mathrm{E}_6(\mathrm{A}) \iff (\mathrm{A} - 6\mathrm{I}_2)\mathrm{X} = 0 \iff (x,y) = y(3,1)$$

Ainsi
$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, notant $\mathrm{M} = \mathrm{P}\mathrm{X}\mathrm{P}^{-1}$ avec $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on a

$$\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = \mathrm{A} \iff \mathrm{P}\mathrm{D}^2\mathrm{P}^{-1} + \mathrm{P}\mathrm{D}\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}\mathrm{D}\mathrm{P}^{-1} \iff \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} = \mathrm{D}$$

On remarque
$$\mathrm{X}\mathrm{D} = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 = \mathrm{D}\mathrm{X}$$

Posant $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on trouve

$$\mathrm{X}\mathrm{D} - \mathrm{D}\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 0 & 4b \\ -4c & 0 \end{pmatrix} = 0 \iff (b,c) = 0$$

Ainsi $\quad \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} = \mathrm{D} \iff \begin{cases} a^2 + a = 2 \\ d^2 + d = 6 \end{cases} \iff (a,d) \in \{(1,2), (-2,2), (1,-3), (-2,-3)\}$

Enfin après calcul des matrices $\mathrm{M} = \mathrm{P}\mathrm{D}\mathrm{P}^{-1}$, on conclut

$$\boxed{\text{Les solutions sont } \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -11 & -3 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}.}$$

Remarque : On a vu que X et D commutent et par conséquent, la matrice X est diagonale. C'est un fait plus général : pour f et g dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, si f et g commutent et f diagonalisable à valeurs propres simples, alors $g \in \mathbb{K}[f]$ et donc g est en particulier diagonalisable pour le même changement de base que f. Le lecteur curieux pourra se référer à l'exercice 5 de la feuille 23.

Exercice 2 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{A} \end{array}\right) \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

Montrer que $$\mathrm{A} \text{ diagonalisable} \iff \mathrm{B} \text{ diagonalisable}$$

Corrigé : On a $$\mathrm{B}^2 = 2\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^2 & \mathrm{A}^2 \\ \hline \mathrm{A}^2 & \mathrm{A}^2 \end{array}\right) \qquad \mathrm{B}^3 = 2^2\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^3 & \mathrm{A}^3 \\ \hline \mathrm{A}^3 & \mathrm{A}^3 \end{array}\right)$$

et par une récurrence immédiate

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{B}^k = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c} (2\mathrm{A})^k & (2\mathrm{A})^k \\ \hline (2\mathrm{A})^k & (2\mathrm{A})^k \end{array}\right)$$

Il s'ensuit par combinaison linéaire

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \quad \text{avec} \quad \mathrm{P}(0) = 0 \qquad \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{P}(2\mathrm{A}) & \mathrm{P}(2\mathrm{A}) \\ \hline \mathrm{P}(2\mathrm{A}) & \mathrm{P}(2\mathrm{A}) \end{array}\right) \qquad (*)$$

Si B est diagonalisable, il existe P annulateur de B scindé à racines simples et on a $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) \subset \mathrm{Z}(\mathrm{P})$ où $\mathrm{Z}(\mathrm{P})$ désigne l'ensemble des racines de P. Comme $\mathrm{rg}\ \mathrm{B} < 2n$ puisque par exemple $\mathrm{L}_1 = \mathrm{L}_{n+1}$, on a $0 \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})$ d'où $\mathrm{P}(0) = 0$. Ainsi, la relation $(*)$ a lieu et $\mathrm{P}(2\mathrm{X})$ est donc un polynôme annulateur scindé à racines simples de A d'où

$$\mathrm{B} \text{ diagonalisable} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{A} \text{ diagonalisable}$$

Réciproquement, si A est diagonalisable, il existe $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ annulateur de A scindé à racines simples. Quitte à considérer XQ, on a $0 \in \mathrm{Z}(\mathrm{Q})$. Ainsi, en posant $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{Q}(\mathrm{X}/2)$, il vient d'après la relation $(*)$ que $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0$ avec P scindé à racines simples, autrement dit

$$\mathrm{A} \text{ diagonalisable} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{B} \text{ diagonalisable}$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{A} \text{ diagonalisable} \iff \mathrm{B} \text{ diagonalisable}}$$

Variantes : 1. On peut faire sans polynôme annulateur mais c'est plus délicat. Si A est diagonalisable, on dispose de $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$ diagonale. Posant $\mathrm{Q} = \mathrm{diag}(\mathrm{P}, \mathrm{P})$, on trouve

$$\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{BB} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{D} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{D} & \mathrm{D} \end{array}\right)$$

Puis, posant $\mathrm{R} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \\ \hline \mathrm{I}_n & -\mathrm{I}_n \end{array}\right)$, on trouve R inversible d'inverse $\mathrm{R}^{-1} = \dfrac{1}{2}\mathrm{R}$ et $(\mathrm{QR})^{-1}\mathrm{BQR} = \mathrm{diag}(2\mathrm{D}, 0)$. Réciproquement supposons B diagonalisable. On a

$$\mathbb{K}^{2n} = \mathrm{E}_0(\mathrm{B}) \oplus \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) \smallsetminus \{0\}} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{B})$$

Pour $\lambda \neq 0$ et $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{K})$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{BX} = \lambda\mathrm{X} &\iff \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{A} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \mathrm{X}_1 \\ \hline \mathrm{X}_2 \end{array}\right) = \lambda\left(\begin{array}{c} \mathrm{X}_1 \\ \hline \mathrm{X}_2 \end{array}\right) \\ &\iff \mathrm{A}(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2) = \lambda\mathrm{X}_1 = \lambda\mathrm{X}_2 \iff \begin{cases} \mathrm{X}_1 = \mathrm{X}_2 \\ \mathrm{AX}_1 = \dfrac{\lambda}{2}\mathrm{X}_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, avec l'application injective $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_1$, on envoie une famille libre de vecteurs propres de B associés à des valeurs propres non nulles sur des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres non nulles. On en déduit

$$\dim \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) \smallsetminus \{0\}} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{B}) \leqslant \dim \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \smallsetminus \{0\}} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$$

Avec les opérations $\mathrm{L}_{i+n} \leftarrow \mathrm{L}_{i+n} - \mathrm{L}_i$ pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ puis $\mathrm{C}_{j+n} \leftarrow \mathrm{C}_{j+n} - \mathrm{C}_j$ pour $j \in [\![1\,;\,n]\!]$, il vient

$$\mathrm{rg}\ \mathrm{B} = \mathrm{rg}\,\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{A} \end{array}\right) = \mathrm{rg}\,\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \mathrm{rg}\,\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \mathrm{rg}\ \mathrm{A}$$

D'après le théorème du rang, il s'ensuit

$$\dim \mathrm{E}_0(\mathrm{B}) = 2n - \mathrm{rg}\ \mathrm{B} = 2n - \mathrm{rg}\ \mathrm{A} = n + \dim \mathrm{E}_0(\mathrm{A})$$

Ainsi $$2n \leqslant n + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$$

On en déduit $$n \leqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) \leqslant \dim \mathbb{K}^n = n$$

et on conclut que la matrice A est diagonalisable.

2. Pour le sens direct, on peut aussi partir de l'égalité

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{E}_0(\mathrm{A}) \oplus \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \smallsetminus \{0\}} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$$

L'application injective $\mathrm{X} \mapsto \left(\begin{array}{c} \mathrm{X} \\ \hline \mathrm{X} \end{array}\right)$ envoie une famille libre de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres non nulles sur des vecteurs propres de B associés à des valeurs propres non nulles. L'application injective $\mathrm{X} \mapsto \left(\begin{array}{c} \mathrm{X} \\ \hline 0 \end{array}\right)$ envoie une famille libre de vecteurs propres de A associés à zéro sur une famille libre de vecteurs propres de B associés à zéro. On peut compléter cette famille par $(\mathrm{E}_j - \mathrm{E}_{j+n})_{1 \leqslant j \leqslant n}$ famille de vecteurs propres de B associés à zéro. La famille obtenue est libre et on en déduit

$$\dim \mathrm{E}_0(\mathrm{B}) + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) \smallsetminus \{0\}} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{B}) \geqslant n + \dim \mathrm{E}_0(\mathrm{A}) + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \smallsetminus \{0\}} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) = n + \dim \mathbb{K}^n$$

Le résultat suit.

Exercice 3 (***)

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe n entier non nul vérifiant $\mathrm{M}^n = \mathrm{I}_2$. Établir $\mathrm{M}^{12} = \mathrm{I}_2$.

Corrigé : Le polynôme $\mathrm{X}^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (\mathrm{X} - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}})$ est annulateur de M et scindé à racines simples. Il s'ensuit que M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ avec $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}) \subset \mathbb{U}_n$. Les racines de χ_{M} sont donc racines n-ièmes de l'unité et on a $\chi_{\mathrm{M}} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ donc les racines sont toutes deux réelles ou complexes conjuguées. Si $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}) \subset \mathbb{R}$, la matrice M peut être semblable (et donc égale) à I_2 ou $-\mathrm{I}_2$ ou aussi semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (la position du signe n'importe pas, il suffit d'échanger les colonnes dans la matrice de passage) d'où M^2 semblable (et donc égale) à I_2 et le résultat suit pour tous ces cas. Si le spectre de M n'est pas réel, la matrice M est semblable à $\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R} \smallsetminus \pi\mathbb{Z}$. Par ailleurs, on a

$$\chi_{\mathrm{M}} = \mathrm{X}^2 - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{X} + \det \mathrm{M} \quad \text{avec} \quad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) \in \mathbb{Z}$$

La trace étant un invariant de similitude, on obtient $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 2\cos\theta \in [\![-1\,;\,1]\!]$. Le cas $\cos\theta = 0$ correspond à $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ d'où M semblable à $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ et par conséquent M^4 semblable (et donc égale) à I_2. Le cas $\cos\theta = 1$ correspond à $\theta \equiv \pm\dfrac{\pi}{3}\ [\pi]$ d'où M semblable à $\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} \end{pmatrix}$ d'où M^3 semblable (et donc égale) à I_2. Le cas $\cos\theta = -1$ se traite de manière analogue. Ainsi, il existe toujours un diviseur d de 12 tel que $\mathrm{M}^d = \mathrm{I}_2$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{M}^{12} = \mathrm{I}_2}$$

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On définit le *commutant* de f par

$$\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid f \circ g = g \circ f\}$$

1. Justifier que $\mathscr{C}(f)$ est un sev de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. On suppose f nilpotente d'indice n. Déterminer $\mathscr{C}(f)$.
3. On suppose seulement f trigonalisable. Montrer $\dim \mathscr{C}(f) \geqslant n$.

Corrigé : 1. L'ensemble $\mathscr{C}(f)$ contient $0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ et est stable par combinaison linéaire par linéarité de la composition d'où

$$\boxed{\text{Le commutant } \mathscr{C}(f) \text{ est un sev de } \mathscr{L}(\mathrm{E}).}$$

2. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_{\mathrm{E}}$. Montrons que $\mathscr{B} = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Soit $(\alpha_k)_{k\in[\![0\,;\,n-1]\!]} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0) = 0_{\mathrm{E}}$. En appliquant f^{n-1} dans cette égalité, il vient

$$f^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0)\right) = \alpha_0 f^{n-1}(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k f^{k-1}(f^n(x_0)) = \alpha_0 \underbrace{f^{n-1}(x_0)}_{\neq 0_{\mathrm{E}}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_0 = 0$$

En répétant le procédé, on montre la nullité de tous les α_k d'où la liberté de $\mathscr{B}$ et comme $\mathrm{Card}\,\mathscr{B} = \dim \mathrm{E}$, la famille $\mathscr{B}$ est une base de E. Soit $g \in \mathscr{C}(f)$. On dispose de $(a_k)_{k\in[\![0\,;\,n-1]\!]} \in \mathbb{K}^n$ tel que $g(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$. Posons $h = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f^k$. Comme g commute avec f, alors g commute avec f^i pour tout $i \in [\![0\,;\,n-1]\!]$. On a

$$\begin{aligned} g\left(f^i(x_0)\right) = g \circ f^i(x_0) = f^i \circ g(x_0) &= f^i\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{k+i}(x_0) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k\right)(f^i(x_0)) = h(f^i(x_0)) \end{aligned}$$

Ainsi, les endomorphismes g et h coïncident sur $\mathscr{B}$ et par caractérisation d'une application linéaire sur une base, il s'ensuit que $g \in \mathbb{K}[f]$ d'où $\mathscr{C}(f) \subset \mathbb{K}[f]$. L'inclusion réciproque est immédiate d'où

$$\boxed{\mathscr{C}(f) = \mathbb{K}[f]}$$

3. Soit $\mathscr{B}$ une base de trigonalisation de f et $\mathrm{T} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f \in \mathrm{T}_n(\mathbb{K})$ (espace des matrices triangulaires supérieures). Notant

$$\mathscr{C}(\mathrm{T}) = \{\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \quad | \quad \mathrm{MT} = \mathrm{TM}\}$$

on a clairement $\dim \mathscr{C}(\mathrm{T}) = \dim \mathscr{C}(f)$. Considérons la dimension de l'espace de solutions de l'équation

$$\mathrm{MT} - \mathrm{TM} = 0 \tag{S}$$

d'inconnue $\mathrm{M} \in \mathrm{T}_n(\mathbb{K})$. Les termes diagonaux donnent les équations triviales

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad m_{i,i}t_{i,i} - t_{i,i}m_{i,i} = 0$$

Par conséquent, le système (S) possède $\dfrac{n(n+1)}{2} - n$ équations pour $\dfrac{n(n+1)}{2}$ inconnues. Comme le rang de (S) est majorée par le nombre d'équations, il s'ensuit

$$\dim \mathscr{C}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{T}_n(\mathbb{K}) \geqslant \frac{n(n+1)}{2} - \left(\frac{n(n+1)}{2} - n\right) \geqslant n$$

Ainsi $$\boxed{\dim \mathscr{C}(\mathrm{T}) \geqslant \dim \mathscr{C}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{T}_n(\mathbb{K}) \geqslant n}$$

Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ diagonalisable. Décrire les sev stables par u.

Corrigé : Soit F un sev stable par u. L'endomorphisme induit u_{F} est diagonalisable donc admet une base de vecteurs propres qui sont aussi vecteurs propres de u et des valeurs propres qui sont parmi celles de u. Ainsi, on a

$$\mathrm{F} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u_{\mathrm{F}})} \mathrm{E}_\lambda(u_{\mathrm{F}}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}\,(u_{\mathrm{F}}) \subset \mathrm{Sp}\,(u) \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u_{\mathrm{F}}) \qquad \mathrm{E}_\lambda(u_{\mathrm{F}}) \text{ sev de } \mathrm{E}_\lambda(f)$$

Notant $\mathrm{F}_\lambda = \mathrm{E}_\lambda(u_{\mathrm{F}})$ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u_{\mathrm{F}})$ et $\mathrm{F}_\lambda = \{0\}$ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \smallsetminus \mathrm{Sp}\,(u_{\mathrm{F}})$, on peut donc écrire

$$\mathrm{F} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{F}_\lambda \quad \text{avec} \quad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \qquad \mathrm{F}_\lambda \text{ sev de } \mathrm{E}_\lambda(u)$$

Réciproquement, un sev de la forme $\mathrm{F} = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{F}_\lambda$ avec F_λ sev de $\mathrm{E}_\lambda(u)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$ est stable par u. En effet, pour $x \in \mathrm{F}$, il existe $(x_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)}$ tel que $x = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} x_\lambda$. Puis

$$u(x) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} u(x_\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \lambda x_\lambda \in \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{F}_\lambda$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Les sev stables par } u \text{ sont exactement les } \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{F}_\lambda \text{ avec les } \mathrm{F}_\lambda \text{ des sev respectifs des } \mathrm{E}_\lambda(u).}$$

Variante : Par récurrence, voir sujet Centrale PC.

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ diagonalisable.

1. Si $\mathrm{Card}\ \mathrm{Sp}\,(u) = n$, déterminer le nombre de sev stables par u.
2. Que peut-on dire si $\mathrm{Card}\ \mathrm{Sp}\,(u) < n$?

Corrigé : 1. Comme u admet n valeurs propres distinctes, ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Soit F sev stable par u. L'endomorphisme induit u_{F} est diagonalisable donc admet une base de vecteurs propres qui sont aussi vecteurs propres de u et des valeurs propres qui sont parmi celles de u. Ainsi, on a

$$\mathrm{F} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{I}} \mathrm{E}_\lambda(u_{\mathrm{F}}) \quad \text{avec} \quad \mathrm{I} \subset \mathrm{Sp}\,(u) \quad \text{et} \quad \forall\lambda \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{E}_\lambda(u_{\mathrm{F}}) \subset \mathrm{E}_\lambda(u)$$

Or, on a $\dim \mathrm{E}_\lambda(u_{\mathrm{F}}) \geqslant 1$ et $\dim \mathrm{E}_\lambda(u) = 1$ pour $\lambda \in \mathrm{I}$, on en déduit que

$$\mathrm{F} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{I}} \mathrm{E}_\lambda(u) \quad \text{avec} \quad \mathrm{I} \subset \mathrm{Sp}\,(u)$$

Réciproquement, pour $\mathrm{I} \subset \mathrm{Sp}\,(u)$, on vérifie sans difficulté que $\bigoplus\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$ est un sev stable par u. Ainsi, les sev stables par u sont exactement les $\bigoplus\limits_{\lambda\in\mathrm{I}} \mathrm{E}_\lambda(u)$ avec $\mathrm{I} \subset \mathrm{Sp}\,(u)$. Ainsi, le nombre de sev stables par u est le nombre de parties de $\mathrm{Sp}\,(u)$. Comme $\mathrm{Card}\ \mathrm{Sp}\,(u) = n$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ parties de $\mathrm{Sp}\,(u)$ et on conclut

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{Card}\ \mathrm{Sp}\,(u) = n, \text{ il y a } 2^n \text{ sev stables par } u.}$$

2. Si $\mathrm{Card}\ \mathrm{Sp}\,(u) < n$, alors il existe λ valeur propre de multiplicité $m_\lambda(u) > 1$. On a $\dim \mathrm{E}_\lambda(u) = m_\lambda(u)$ car u est diagonalisable et par conséquent, l'espace propre $\mathrm{E}_\lambda(u)$ contient un plan vectoriel qu'on peut noter $\mathrm{Vect}\,(x, y)$ avec (x, y) famille libre dans $\mathrm{E}_\lambda(u)$. Notons $\mathrm{D}_n = \mathrm{Vect}\,(x + ny)$ avec n entier. Pour n, m entiers distincts, on a $(x + ny, x + my)$ libre. En effet, soit α, β des scalaires. Il vient

$$\alpha(x + ny) + \beta(x + my) = 0 \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ n\alpha + m\beta = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = 0$$

Ainsi, les sev $(\mathrm{D}_n)_n$ sont deux à deux distincts et ils sont clairement par stables par u. On conclut

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{Card}\ \mathrm{Sp}\,(u) < n, \text{ il y a une infinité de sev stables par } u.}$$

Exercice 7 (***)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{AB} = 0$. Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ et $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$ soient triangulaires supérieures.

Corrigé : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{C}^n$ et u, v dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ respectivement canoniquement associés à A et B. On a $u \circ v = 0$ d'où $\mathrm{Im}\ v \subset \mathrm{Ker}\ u$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E obtenue par complétion d'une base de $\mathrm{Ker}\ u$. On a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{A}_1 \\ \hline 0 & \mathrm{A}_2 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} v = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

avec $\mathrm{B}_1 \in \mathscr{M}_r(\mathbb{C})$ et $\mathrm{A}_2 \in \mathscr{M}_{n-r}(\mathbb{C})$ où $r = \dim \mathrm{Ker}\ u$. Il existe $\mathrm{P}_2 \in \mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{P}_1 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{P}_2^{-1}\mathrm{A}_2\mathrm{P}_2$ et $\mathrm{P}_1^{-1}\mathrm{B}_1\mathrm{P}_1$ soient triangulaires supérieures. Alors, considérant la matrice par blocs $\mathrm{P} = \mathrm{diag}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$, on a P inversible d'inverse $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{diag}(\mathrm{P}_1^{-1}, \mathrm{P}_2^{-1})$ et un produit par blocs donne

$$\mathrm{P}^{-1} \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{A}_1 \\ \hline 0 & \mathrm{A}_2 \end{array}\right) \mathrm{P} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{P}_1^{-1}\mathrm{A}_1\mathrm{P}_2 \\ \hline 0 & \mathrm{P}_2^{-1}\mathrm{A}_2\mathrm{P}_2 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{P}^{-1} \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \mathrm{P} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{P}_1^{-1}\mathrm{B}_1\mathrm{P}_1 & \mathrm{P}_1^{-1}\mathrm{B}_2\mathrm{P}_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

qui sont toutes deux triangulaires supérieures. On conclut

$$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ telle que } \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} \text{ et } \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} \text{ soient triangulaires supérieures.}}$$

Exercice 8 (***)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que

$$f \text{ diagonalisable} \iff f^2 \text{ diagonalisable et } \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$$

Le résultat subsiste-t-il pour $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$?

Corrigé : Le sens direct est immédiat en considérant une base de vecteurs propres. Réciproquement, on a

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, f^2 \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f^2) \smallsetminus \{0\}} \mathrm{Ker}\,(f^2 - \lambda\, \mathrm{id}\,) \right)$$

Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on note $\pm\,\mu(\lambda)$ les racines carrées complexes. Ainsi, on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^* \qquad \mathrm{X}^2 - \lambda = (\mathrm{X} - \mu(\lambda))(\mathrm{X} + \mu(\lambda)) \quad \text{avec} \quad (\mathrm{X} - \mu(\lambda)) \wedge (\mathrm{X} + \mu(\lambda)) = 1$$

D'après le lemme des noyaux, il vient

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, f^2 \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f^2) \smallsetminus \{0\}} \mathrm{Ker}\,(f - \mu(\lambda)\, \mathrm{id}\,) \oplus \mathrm{Ker}\,(f + \mu(\lambda)\, \mathrm{id}\,) \right)$$

Comme $\mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$ (éventuellement réduit à $\{0_\mathrm{E}\}$), on a montré que E est somme directe des sous-espaces propres de f d'où f diagonalisable. Ainsi

$$\boxed{f \text{ diagonalisable} \iff f^2 \text{ diagonalisable et } \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2}$$

Dans $\mathbb{R}^2$ par exemple, le résultat est faux en considérant f canoniquement associé à $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ puisque $f^2 = \mathrm{id}$ et f n'est pas diagonalisable.

Exercice 9 (****)

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que u est non diagonalisable si et seulement s'il existe un plan vectoriel F stable par u et $\mathscr{B}$ une base de F tels que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u_\mathrm{F} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Corrigé : Supposons u non diagonalisable. On a π_u scindé mais pas à racines simples d'où l'existence de $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$ de multiplicité $\alpha \geqslant 2$ dans π_u. On note $\pi_u = (\mathrm{X} - \lambda)^\alpha \mathrm{Q}$, $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\, \mathrm{id}\,)^\alpha$ et $v = u_\mathrm{H}$. On a $\mathrm{Ker}\,(v - \lambda\, \mathrm{id}\,)^{\alpha-1} \subset \mathrm{Ker}\,(v - \lambda\, \mathrm{id}\,)^\alpha = \mathrm{H}$ et cette inclusion est stricte sans quoi on aurait $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}\,(v - \lambda\, \mathrm{id}\,)^{\alpha-1}$ d'où $(\mathrm{X} - \lambda)^{\alpha-1}$ annulateur de v puis $(\mathrm{X} - \lambda)^{\alpha-1}\mathrm{Q}$ annulateur de u (puisque $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{Ker}\, \mathrm{Q}(u)$ d'après le lemme des noyaux) ce qui contredit la minimalité de π_u. On prend $a \in \mathrm{H} \smallsetminus \mathrm{Ker}\,(v - \lambda\, \mathrm{id}\,)^{\alpha-1}$, $y = (v - \lambda\, \mathrm{id}\,)^{\alpha-2}(a)$ et $x = (v - \lambda\, \mathrm{id}\,)^{\alpha-1}(a)$. Par choix de a, on a y et x non nuls puis $v(x) = \lambda x$ et $v(y) = x + \lambda y$. Soit $(\gamma, \delta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\gamma x + \delta y = 0$. Il vient

$$(v - \lambda\, \mathrm{id}\,)(\gamma x + \delta y) = \delta x = 0$$

On en déduit $\delta = 0$ puis $\gamma = 0$. Ainsi, le sev $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(x, y)$ est un plan stable par v donc par u et notant $\mathscr{B} = (x, y)$, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u_\mathrm{F} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Réciproquement, si u était diagonalisable, alors pour F stable, on aurait u_F diagonalisable puis $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u_\mathrm{F}$ semblable à $\lambda \mathrm{I}_2$ donc égale à cette matrice ce qui est faux. On conclut

$$\boxed{u \text{ non diagonalisable} \iff \text{il existe F plan stable et } \mathscr{B} \text{ base de F tels que } \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u_\mathrm{F} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}$$

Exercice 10 (****)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer

$$\chi_{\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{B}} \iff \forall k \in [\![1 \,;\, n]\!] \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^k) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}^k)$$

Corrigé : Le sens direct est immédiat : si $\chi_{\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{B}}$, alors les matrices A et B ont même valeurs propres et mêmes multiplicités et le résultat suit par trigonalisation de A et de B. Supposons

$$\forall k \in [\![1 \,;\, n]\!] \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^k) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}^k)$$

Par linéarité de la trace, on a $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{P}(\mathrm{A})) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{P}(\mathrm{B}))$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$. Supposons $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \neq \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})$ avec par exemple $\mu \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) \smallsetminus \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$. Soit $(\mathrm{L}_\lambda)_\lambda$ la famille de polynômes interpolateurs associés à $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \cup \{\mu\}$. L'ensemble $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \cup \{\mu\}$ est de cardinal au plus $n+1$. Les polynômes L_λ sont donc de degré au plus n. Par trigonalisation pour A et B, on trouve

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{L}_\mu(\mathrm{A})) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{L}_\mu(\mathrm{B})) = m_\mu(\mathrm{B}) \quad \text{avec} \quad m_\mu(\mathrm{B}) \geqslant 1$$

ce qui est absurde. On en déduit $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})$. Considérant la famille $(\mathrm{L}_\lambda)_\lambda$ (abus de notation ...) associée à $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})$, on trouve

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \qquad m_\lambda(\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{L}_\lambda(\mathrm{A})) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{L}_\lambda(\mathrm{B})) = m_\lambda(\mathrm{B})$$

Ainsi, les polynômes χ_{A} et χ_{B} de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ ont même racines avec mêmes multiplicités et sont unitaires. On conclut

$$\boxed{\chi_{\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{B}} \iff \forall k \in [\![1 \,;\, n]\!] \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^k) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}^k)}$$