ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°22

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (*)

Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables :

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\qquad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{pmatrix},\qquad \mathrm{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad \mathrm{D}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Exercice 2 (*)

Les matrices suivantes sont-elles trigonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? diagonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, préciser la matrice de passage de la base canonique vers une base de vecteurs propres.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix},\qquad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&0&1\\0&2&0\end{pmatrix},\qquad \mathrm{C}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&4&0\\-4&2&5\end{pmatrix},\qquad \mathrm{D}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&-1\\-1&1&2\end{pmatrix}$$

Exercice 3 (*)

Montrer que la matrice J de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de 1 est diagonalisable et préciser une matrice de passage associée.

Exercice 4 (**)

Soit $n \geqslant 2$.

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\operatorname{rg} \mathrm{A} = 1$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
2. Existe-t-il une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices diagonalisables ?

Exercice 5 (**)

Diagonaliser la matrice $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 2$ et

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ ou } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 6 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ diagonalisable. On note $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)}$ la famille de projecteurs associés à la somme directe $\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$. Montrer

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \qquad p_\lambda \in \mathbb{K}[u]$$

Exercice 7 (**)

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{M}^2 - \mathrm{M}^\top = \mathrm{I}_n$. Montrer que M est diagonalisable.

Exercice 8 (**)

Soit A matrice compagne de $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ suite récurrente linéaire d'ordre $p \geqslant 2$. Résoudre $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$ avec $\mathrm{X}^\top = \begin{pmatrix} x_0 & \dots x_{p-1} \end{pmatrix}$ non nulle. En déduire la forme des sous-espaces propres de A et une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de A.

Exercice 9 (*)

Les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes sont-elles semblables :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 (**)

Soit n entier non nul, $a_0, \dots a_{n-1}$ des complexes et

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer J^k pour $k \in [\![0\,; n]\!]$.
2. Montrer que la matrice J est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et préciser son spectre.
3. En déduire $\det \mathrm{A}$.

Exercice 11 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ diagonalisable. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\exists x \in \mathrm{E} \quad | \quad (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ base de E ;
2. les valeurs de propres de f sont simples ;
3. $(\mathrm{id}\,, f, \dots, f^{n-1})$ base de $\mathbb{K}[f]$.

Exercice 12 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et u, v dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, diagonalisables et tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer qu'il existe une base de diagonalisation pour u et v.

Exercice 13 (**)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et u, v dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ diagonalisables tels que $u^5 = v^5$. Montrer que $u = v$.