# Préparation à l'interrogation n°05

## 1 Algèbre linéaire

1. Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ des $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. On a
$$g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$$
2. Formule de Grassmann : Soient $\mathrm{F}, \mathrm{G}$ sev de dimensions finies de $\mathrm{E}$ un $\mathbb{K}$-ev. On a
$$\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$$
3. Soit $\mathrm{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathrm{F}$, $\mathrm{G}$ des sev de $\mathrm{E}$. On a
$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \iff \begin{cases} \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{E} \\ \mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\} \end{cases} \iff \begin{cases} \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{E} \\ \mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{E} \end{cases}$$
$$\iff \exists \mathscr{B}_{\mathrm{F}}, \mathscr{B}_{\mathrm{G}} \text{ bases respectives de } \mathrm{F}, \mathrm{G} \mid \mathscr{B}_{\mathrm{F}} \uplus \mathscr{B}_{\mathrm{G}} \text{ base de } \mathrm{E}$$
4. Théorème du rang : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ avec $\mathrm{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathrm{F}$ un $\mathbb{K}$-ev. On a
$$\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{rg}\,(f)$$
5. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ avec $\mathrm{E}$ et $\mathrm{F}$ des $\mathbb{K}$-ev de <u>même</u> dimension finie. On a
$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

## 2 Calcul matriciel

1. Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $\mathrm{AB} \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par $\mathrm{AB} = (c_{i,j})$ où $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![ 1\,;\, n ]\!] \times [\![ 1\,;\, q ]\!]$ ;
2. Soit $(\mathrm{E}_{i,j})_{(i,j) \in [\![ 1\,;\, n ]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a la relation
$$\forall (i,j,k,\ell) \in [\![ 1\,;\, n ]\!]^4 \qquad \mathrm{E}_{i,j} \times \mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_{j,k}\, \mathrm{E}_{i,\ell}$$
3. Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On a $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{BA})$ ;
4. Pour $\mathrm{A} = \big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det \mathrm{A} = \sum\limits_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ ;
5. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a
$$\mathrm{A}\mathrm{Com}(\mathrm{A})^{\top} = \mathrm{Com}(\mathrm{A})^{\top}\mathrm{A} = \det(\mathrm{A})\mathrm{I}_n$$
6. Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ et $\mathrm{A} = \big(x_i^{j-1}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant $\det \mathrm{A}$ dit *de Vandermonde* vaut
$$\det(\mathrm{A}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$
7. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = r$. Il existe $\mathrm{P}, \mathrm{Q}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PJ}_r\mathrm{Q}$ avec $\mathrm{J}_r = \mathrm{diag}(\mathrm{I}_r, 0)$.

## 3 Exercice type

Notant $f_\lambda : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ pour $\lambda$ réel, liberté de la famille $(f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_p})$ avec les $\lambda_i$ deux à deux distincts (voir exemple du cours).

## 4 Exercice type

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$ telle que

$$\forall i \in [\![ 1\,;\, n ]\!] \qquad |a_{i,i}| > \mathrm{R}_i \quad \text{avec} \quad \mathrm{R}_i = \sum_{j \in [\![ 1\,;\, n ]\!] \smallsetminus \{i\}} |a_{i,j}|$$

La matrice A est inversible.

**Corrigé :** Supposons $\mathrm{A} \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, autrement dit

$$\exists \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \smallsetminus \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\right\} \quad | \quad \mathrm{AX} = 0$$

On note $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec les $x_i \in \mathbb{K}$. Si $\mathrm{X} \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$, on dispose de $i_0 \in [\![ 1\,;\, n ]\!]$ tel que

$$|x_{i_0}| = \operatorname*{Max}_{i \in [\![ 1\,;\, n ]\!]} |x_i| > 0$$

La $i_0$-ème ligne de AX est nulle donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j = 0 &\iff a_{i_0,i_0} x_{i_0} + \sum_{j \in [\![ 1\,;\, n ]\!] \smallsetminus \{i_0\}} a_{i_0,j} x_j = 0 \\ &\iff |a_{i_0,i_0}| = \left| \sum_{j \in [\![ 1\,;\, n ]\!] \smallsetminus \{i_0\}} a_{i_0,j} \frac{x_j}{|x_{i_0}|} \right| \end{aligned}$$

la division par $|x_{i_0}|$ étant possible puisque le nombre est non nul. Par inégalité triangulaire et choix de $|x_{i_0}| = \operatorname*{Max}_{i \in [\![ 1\,;\, n ]\!]} |x_i|$, il vient alors

$$|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j \in [\![ 1\,;\, n ]\!] \smallsetminus \{i_0\}} |a_{i_0,j}| \underbrace{\left| \frac{x_j}{x_{i_0}} \right|}_{\leqslant 1} \leqslant \sum_{j \in [\![ 1\,;\, n ]\!] \smallsetminus \{i_0\}} |a_{i_0,j}|$$

ce qui contredit l'hypothèse de départ faite sur A. Ainsi

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \mathrm{AX} = 0 \Longrightarrow \mathrm{X} = 0$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})}$$

## 5 Exercice type

Polynôme caractéristique d'une matrice compagne (voir preuve du théorème de Cayley Hamilton).

## 6 Questions de cours

Réduction, graphes usuels.