Préparation à l'interrogation n°06

1 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\cos x$;
2. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\ln(1+x)$;
3. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\dfrac{1}{1-x}$;
4. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de

$$1-\cos(t)^n = 1-\left(1-\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)\right)^n = 1-\left(1-\frac{nt^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)\right) = \frac{nt^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)$$

2 Trigonométrie

1. $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
2. $\sin a \sin b = \dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$

3 Formules

Résolution des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

4 Algèbre linéaire

1. Soient $\mathrm{E},\mathrm{F},\mathrm{G}$ des $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$. On a
$$g\circ f = 0 \iff \mathrm{Im}\ f \subset \mathrm{Ker}\ g$$
2. Formule de Grassmann : Soient F,G sev de dimensions finies de E un $\mathbb{K}$-ev. On a
$$\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) = \dim\mathrm{F}+\dim\mathrm{G}-\dim\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$$
3. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F, G des sev de E. On a
$$\mathrm{E}=\mathrm{F}\oplus\mathrm{G} \iff \begin{cases}\dim\mathrm{F}+\dim\mathrm{G}=\dim\mathrm{E}\\ \mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{0_{\mathrm{E}}\}\end{cases} \iff \begin{cases}\dim\mathrm{F}+\dim\mathrm{G}=\dim\mathrm{E}\\ \mathrm{F}+\mathrm{G}=\mathrm{E}\end{cases}$$
$$\iff \exists\mathscr{B}_{\mathrm{F}},\mathscr{B}_{\mathrm{G}} \text{ bases respectives de } \mathrm{F},\mathrm{G} \mid \mathscr{B}_{\mathrm{F}}\uplus\mathscr{B}_{\mathrm{G}} \text{ base de } \mathrm{E}$$
4. Théorème du rang : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-ev. On a
$$\dim\mathrm{E} = \dim\mathrm{Ker}\ f + \mathrm{rg}\,(f)$$
5. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ avec E et F des $\mathbb{K}$-ev de même dimension finie. On a
$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

5 Calcul matriciel

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a
$$\mathrm{A}\mathrm{Com}(\mathrm{A})^\top = \mathrm{Com}(\mathrm{A})^\top\mathrm{A} = \det(\mathrm{A})\mathrm{I}_n$$
2. Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ et $\mathrm{A} = \left(x_i^{j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant $\det \mathrm{A}$ dit *de Vandermonde* vaut
$$\det(\mathrm{A}) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)$$
3. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = r$. Il existe P, Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{J}_r\mathrm{Q}$ avec $\mathrm{J}_r = \mathrm{diag}(\mathrm{I}_r, 0)$.
4. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $(\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_n)$ sa famille de colonnes et $(\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n)$ sa famille de lignes. On a
$$\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(\mathrm{A}) \neq 0 \iff \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = n \iff \mathrm{Ker}\ \mathrm{A} = 0$$
$$\iff (\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_n) \text{ libre} \iff (\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n) \text{ libre}$$

6 Exercice type

On pose
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
Les matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ sont-elles semblables ?

Corrigé : Les matrices sont triangulaires donc les valeurs propres et leurs multiplicités se lisent sur la diagonale. Ainsi, les matrices A et B ont chacune 3 valeurs propres distinctes et d'après la condition suffisante de diagonalisation, on en déduit que A et B sont semblables à la matrice diagonale $\mathrm{diag}(1, 2, 3)$ (on choisit cet ordre) et par conséquent

$$\boxed{\text{Les matrices A et B sont semblables.}}$$

7 Exercice type

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et φ définie par $\varphi(\mathrm{P}) = (\mathrm{X} - 1)\mathrm{P}'$. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis que φ est diagonalisable et préciser ses éléments propres.

Corrigé : On a φ linéaire par linéarité de la dérivation et du produit à gauche puis $\varphi(\mathrm{X}^k) = k\mathrm{X}^k - k\mathrm{X}^{k-1}$ pour $k \in [\![0\,;\, n]\!]$. Ainsi, la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\varphi$ avec $\mathscr{C}$ base canonique de E est triangulaire supérieure et on lit $\mathrm{Sp}\,(\varphi) = \{k, k \in [\![0\,;\, n]\!]\}$ d'où φ admet $n + 1$ valeurs propres distinctes et par condition suffisante, ceci prouve que φ est diagonalisable. Enfin, pour $k \in [\![0\,;\, n]\!]$, on cherche $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ tel que $\varphi(\mathrm{P}) = k\mathrm{P}$. En considérant l'équation différentielle $(x - 1)y' = ky$ sur $]\,1\,;+\infty\,[$, on trouve $\mathrm{Vect}\,(x \mapsto (x - 1)^k)$ comme droite vectorielle de solutions.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{L'application } \varphi \text{ est un endomorphisme diagonalisable et} \\ \mathrm{E}_k(\varphi) = \mathrm{Vect}\,((\mathrm{X} - 1)^k) \text{ pour } k \in [\![0\,;\, n]\!].\end{array}}$$

8 Questions de cours

Réduction, graphes usuels.