ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°24

Exercice 1 (**)

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Résoudre en $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = \mathrm{A}$.

Indications : Déterminer $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ est diagonale puis résoudre l'équation en $\mathrm{X} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$. On pourra remarquer $\mathrm{XD} = \mathrm{DX}$.

Exercice 2 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{A} \end{array}\right) \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

Montrer que
$$\mathrm{A} \text{ diagonalisable} \iff \mathrm{B} \text{ diagonalisable}$$

Indications : Déterminer une forme par blocs simple de B^n pour n entier non nul et en déduire $\mathrm{P}(\mathrm{B})$ pour $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(0) = 0$. Utiliser ensuite la caractérisation d'une matrice diagonalisable à l'aide d'un polynôme annulateur.

Exercice 3 (***)

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe n entier non nul vérifiant $\mathrm{M}^n = \mathrm{I}_2$. Établir $\mathrm{M}^{12} = \mathrm{I}_2$.

Indications : Observer que M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ puis distinguer le cas $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}) \subset \mathbb{R}$ ou pas. On pourra alors considérer la trace de M.

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On définit le *commutant* de f par
$$\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid f \circ g = g \circ f\}$$

1. Justifier que $\mathscr{C}(f)$ est un sev de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. On suppose f nilpotente d'indice n. Déterminer $\mathscr{C}(f)$.
3. On suppose seulement f trigonalisable. Montrer $\dim \mathscr{C}(f) \geqslant n$.

Indications : 2. Justifier qu'il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E puis comparer $\mathscr{C}(f)$ à $\mathbb{K}[f]$.
3. Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire, considérer le système $\mathrm{AM} - \mathrm{MA} = 0$ et compter le nombre d'équations et d'inconnues. On pourra détailler les équations concernant les coefficients diagonaux du système.

Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ diagonalisable. Décrire les sev stables par u.

Indications : En considérant u_{F} avec F stable par u, montrer que F peut s'écrire comme somme (directe) de sev des sous-espaces propres de u.

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ diagonalisable.

1. Si Card Sp $(u) = n$, déterminer le nombre de sev stables par u.
2. Que peut-on dire si Card Sp $(u) < n$?

Indications : 1. Observer que les sous-espaces propres de u sont des droites vectorielles puis, pour F stable, montrer que F est somme de sous-espaces propres de u en considérant u_{F}. En déduire que le choix d'une partie de Sp (u) équivaut au choix d'un sev stable par u.
2. Justifier l'existence d'un plan vectoriel stable puis construire une infinité de droites vectorielles stables dans ce plan.

Exercice 7 (***)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{AB} = 0$. Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ et $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$ soient triangulaires supérieures.

Indications : Notant u, v dans $\mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ respectivement canoniquement associés à A et B, considérer $\mathscr{B}$ une base obtenue par complétion d'une base de Ker u.

Exercice 8 (***)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que

$$f \text{ diagonalisable} \iff f^2 \text{ diagonalisable et } \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$$

Le résultat subsiste-t-il pour $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$?

Indications : Pour le sens indirect, observer que

$$\mathrm{E} = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f^2) \smallsetminus \{0\}} \operatorname{Ker}\,(f^2 - \lambda\,\mathrm{id}\,) \right)$$

puis factoriser $(\mathrm{X}^2 - \lambda)$ en notant $\pm\,\mu(\lambda)$ les racines carrées complexes de $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Exercice 9 (****)

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que u est non diagonalisable si et seulement s'il existe un plan vectoriel F stable par u et $\mathscr{B}$ une base de F tels que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u_{\mathrm{F}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Indications : Observer qu'il existe α racine de π_u de multiplicité $\alpha \geqslant 2$. Notant $\mathrm{H} = \operatorname{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^{\alpha}$ et $v = u_{\mathrm{H}}$, vérifier l'inclusion stricte $\operatorname{Ker}\,(v - \lambda\,\mathrm{id}_{\,\mathrm{H}})^{\alpha-1} \subsetneq \mathrm{H}$ et considérer $a \in \mathrm{H} \smallsetminus \operatorname{Ker}\,(v - \lambda\,\mathrm{id}_{\,\mathrm{H}})^{\alpha-1}$ pour choisir une famille de vecteurs (x, y) adaptée.

Exercice 10 (****)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer

$$\chi_{\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{B}} \iff \forall k \in [\![1 \,;\, n]\!] \qquad \operatorname{Tr}(\mathrm{A}^k) = \operatorname{Tr}(\mathrm{B}^k)$$

Indications : Établir $\operatorname{Tr}(\mathrm{P}(\mathrm{A})) = \operatorname{Tr}(\mathrm{P}(\mathrm{B}))$ pour $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ puis considérer des polynômes bien choisis.