ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°27

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (***)

On note $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ l'ensemble des suites $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de carré sommable, *i.e* telles que $\sum |u_n|^2$ converge. Montrer que $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev normé par

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$$

Corrigé : La suite nulle appartient à $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$. Pour $(u_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a clairement $\lambda(u_n)_n = (\lambda u_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ dans $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$. On utilise le résultat suivant

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad (a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2) \iff (a-b)^2 \geqslant 0$$

Ainsi $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant |u_n+v_n|^2 \leqslant (|u_n|+|v_n|)^2 \leqslant 2\left(|u_n|^2+|v_n|^2\right)$

Comme $\sum |u_n|^2$ et $\sum |v_n|^2$ convergent, il s'ensuit que $\sum \left(|u_n|^2+|v_n|^2\right)$ converge et par comparaison, on a donc $\sum |u_n+v_n|^2$ convergente. Ainsi

$$\boxed{\text{L'espace } \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K}) \text{ est un sev de } \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \text{ donc un } \mathbb{K}\text{-ev.}}$$

L'homogénéité et la séparation pour $\|\cdot\|_2$ sont immédiates. Soit N entier. Pour $(u,v) \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})^2$, notant $u^{\mathrm{N}} = (u_n \delta_{n \leqslant \mathrm{N}})_n$ et $v^{\mathrm{N}} = (v_n \delta_{n \leqslant \mathrm{N}})_n$, on a

$$\|u^{\mathrm{N}} + v^{\mathrm{N}}\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} |u_n+v_n|^2}$$

D'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}^{\mathrm{N}+1}$ muni de la norme deux, il vient

$$\|u^{\mathrm{N}} + v^{\mathrm{N}}\|_2 \leqslant \sqrt{\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} |u_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} |v_n|^2} \leqslant \|u\|_2 + \|v\|_2$$

Faisant tendre $\mathrm{N} \to +\infty$, l'inégalité triangulaire s'en déduit et on conclut que

$$\boxed{\text{L'espace } (\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K}), \|\cdot\|_2) \text{ est un espace normé.}}$$

Exercice 2 (***)

Soit $\mathrm{E} = \{f \in \mathscr{C}^2([0;1],\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ muni de

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_2(f) = \|f''+2f'+f\|_\infty$$

Justifier que N_1 et N_2 sont des normes puis les comparer.

Corrigé : L'application N_1 est clairement une norme. Pour l'application N_2, seul la propriété de séparation n'est pas immédiate. Soit $f \in \mathrm{E}$ telle que $\mathrm{N}_2(f) = 0$. Il s'ensuit

$$\begin{cases} f''+2f'+f = 0 \\ f(0) = f'(0) = 0 \end{cases}$$

D'après le théorème de Cauchy linéaire, la fonction nulle est l'unique solution et par suite

$$\boxed{\text{Les applications } \mathrm{N}_1 \text{ et } \mathrm{N}_2 \text{ sont des normes.}}$$

Remarque : Sans le théorème de Cauchy linéaire, on connaît la forme des solutions $f \in \mathrm{E}$ avec

$$\mathrm{N}_2(f) = 0 \iff f'' + 2f' + f = 0 \iff f \in \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \mathrm{e}^{-t}, t \mapsto t\mathrm{e}^{-t})$$

Les conditions initiales permettent d'en déduire $f = 0$.

Par inégalité triangulaire, on obtient

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}_2(f) \leqslant 2\mathrm{N}_1(f)$$

Soit $f \in \mathrm{E}$ et $g = f'' + 2f' + f$. Posant $h = f' + f$, on trouve $g = h' + h$. Par variation de la constante, on obtient

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad h(t) = \mathrm{e}^{-t}\int_0^t g(s)\mathrm{e}^s \,\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad f(t) = \mathrm{e}^{-t}\int_0^t \mathrm{e}^s h(s)\,\mathrm{d}s$$

Par inégalité triangulaire, on trouve

$$\|h\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty \leqslant \|h\|_\infty$$

d'où
$$\|f\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty = \mathrm{N}_2(f)$$

Puis
$$\|f'\|_\infty = \|h - f\|_\infty \leqslant \|h\|_\infty + \|f\|_\infty \leqslant 2\mathrm{N}_2(f)$$

et
$$\|f''\|_\infty = \|g - 2h + f\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty + 2\|h\|_\infty + \|f\|_\infty \leqslant 4\mathrm{N}_2(f)$$

Ainsi
$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}_1(f) \leqslant 7\mathrm{N}_2(f)$$

On conclut
$$\boxed{\text{Les normes } \mathrm{N}_1 \text{ et } \mathrm{N}_2 \text{ sont équivalentes.}}$$

Variante : Soit $f \in \mathrm{E}$ et notons $g = f'' + 2f' + f$. On peut considérer cette égalité comme une équation différentielle et chercher à exprimer f en fonction de g. Avec l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$, on trouve le système fondamental de solutions de l'équation homogène associée, à savoir (φ, ψ) avec $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^t$ et $\psi : t \mapsto t\mathrm{e}^t$. Avec $\lambda, \mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables, on applique la méthode de variation de la constante sur $\lambda\varphi + \mu\psi$ en résolvant pour t réel

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} &\iff \mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 1+t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} t+1 & -t \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \lambda(t) = \alpha - \int_0^t s\mathrm{e}^{-s} g(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad \mu(t) = \beta + \int_0^t \mathrm{e}^{-s} g(s)\,\mathrm{d}s$$

et par suite
$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad f(t) = \alpha\mathrm{e}^t + \beta t\mathrm{e}^t + \int_0^t (t-s)\mathrm{e}^{t-s} g(s)\,\mathrm{d}s$$

Puis, avec $f = \lambda\varphi + \mu\psi$ et $f' = \underbrace{\lambda'\varphi + \mu'\psi}_{=0} + \lambda\varphi' + \mu\psi'$, on trouve

$$f(0) = f'(0) = 0 \iff \alpha = \beta = 0$$

Ainsi
$$f = \lambda\varphi + \mu\psi \qquad f' = \lambda\varphi' + \mu\psi' \qquad f'' = g + \lambda\varphi'' + \mu\psi''$$

avec $\qquad \forall t \in [0;1] \qquad \lambda(t) = -\int_0^t s\mathrm{e}^{-s} g(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad \mu(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-s} g(s)\,\mathrm{d}s$

Il existe des constantes $a, b > 0$ tels que $\|\lambda\|_\infty \leqslant a\|g\|_\infty$ et $\|\mu\|_\infty \leqslant b\|g\|_\infty$

d'où $\qquad \|f\|_\infty \leqslant (a\|\varphi\|_\infty + b\|\psi\|_\infty)\|g\|_\infty \qquad \|f'\|_\infty \leqslant (a\|\varphi'\|_\infty + b\|\psi'\|_\infty)\|g\|_\infty \qquad \ldots$

Ainsi, il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ tel que $\mathrm{N}_1(f) \leqslant \mathrm{C}\|g\|_\infty = \mathrm{CN}_2(f)$. On conclut comme précédemment.

Exercice 3 (***)

Soient a, b, c et d des réels avec $a < b$ et $c < d$. On pose

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{N}_1(\mathrm{P}) = \operatorname*{Sup}_{t\in[a;b]} |\mathrm{P}(t)| \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_2(\mathrm{P}) = \operatorname*{Sup}_{t\in[c;d]} |\mathrm{P}(t)|$$

Comparer les normes N_1 et N_2.

Corrigé : Supposons $b > d$. On pose $\mathrm{P}_n = (\mathrm{X} - m)^n$ pour n entier avec $m = \min(a, c)$. On trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{N}_1(\mathrm{P}_n) = (b - m)^n \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_2(\mathrm{P}_n) = (d - m)^n$$

Par suite
$$\frac{\mathrm{N}_1(\mathrm{P}_n)}{\mathrm{N}_2(\mathrm{P}_n)} = \left(\frac{b-m}{d-m}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Supposons $a < c$. On pose $\mathrm{Q}_n = (\mathrm{X} - \mathrm{M})^n$ pour n entier avec $\mathrm{M} = \max(b, d)$. On trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{N}_1(\mathrm{Q}_n) = (\mathrm{M} - a)^n \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_2(\mathrm{Q}_n) = (\mathrm{M} - c)^n$$

d'où
$$\frac{\mathrm{N}_1(\mathrm{Q}_n)}{\mathrm{N}_2(\mathrm{Q}_n)} = \left(\frac{\mathrm{M}-a}{\mathrm{M}-c}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Les autres cas $d > b$ et $c < a$ s'obtiennent par symétrie des rôles. On conclut

$$\boxed{\text{Les normes } \mathrm{N}_1 \text{ et } \mathrm{N}_2 \text{ sont équivalentes si et seulement si } [a;b] = [c;d].}$$

Supposons $a = c$ et $b > d$. On a

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \qquad \operatorname*{Sup}_{t\in[a;d]} |\mathrm{P}(t)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{t\in[a;b]} |\mathrm{P}(t)|$$

autrement dit N_1 est plus fine que N_2. Les autres situations avec un cas d'égalité entre bornes se traitent de la même manière. Ainsi

$$\boxed{\text{Si } a = c \text{ ou } b = d, \text{ alors il existe une relation de finesse entre } \mathrm{N}_1 \text{ et } \mathrm{N}_2.}$$

Exercice 4 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev normé et F un sev de E. Montrer

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E} \qquad \mathrm{d}(\lambda x, \mathrm{F}) = |\lambda|\,\mathrm{d}(x, \mathrm{F})$$

Corrigé : Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E}$. Si $\lambda = 0$, l'égalité est immédiate. Supposons $\lambda \neq 0$. On a pour $y \in \mathrm{F}$

$$\|\lambda x - y\| = |\lambda|\,\|x - y/\lambda\| \geqslant |\lambda| \operatorname*{Inf}_{z\in\mathrm{F}} \|x - z\| = |\lambda|\,\mathrm{d}(x, \mathrm{F})$$

Passant à la borne inférieure pour $y \in \mathrm{F}$, il vient

$$\mathrm{d}(\lambda x, \mathrm{F}) \geqslant |\lambda|\,\mathrm{d}(x, \mathrm{F})$$

puis $$\mathrm{d}(x,\mathrm{F}) = \mathrm{d}\left(\frac{1}{\lambda}\lambda x,\mathrm{F}\right) \geqslant \frac{1}{|\lambda|}\mathrm{d}(\lambda x,\mathrm{F})$$

d'où $$\mathrm{d}(\lambda x,\mathrm{F}) \leqslant |\lambda|\,\mathrm{d}(x,\mathrm{F})$$

On conclut $$\boxed{\forall(\lambda,x)\in\mathbb{K}\times\mathrm{E}\qquad \mathrm{d}(\lambda x,\mathrm{F}) = |\lambda|\,\mathrm{d}(x,\mathrm{F})}$$

Exercice 5 (****)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{A}\in\mathrm{E}$ avec $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})\subset \mathrm{D}(0,1)$. Étudier la convergence de la suite $(\mathrm{A}^p)_p$.

Corrigé : Soit $u\in\mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à A. En considérant $\mathscr{B}_k = (e_1, e_2/k, \ldots, e_n/k^{n-1})$ avec $\mathscr{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de trigonalisation de u et k un entier non nul, on a

$$\forall j\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]\qquad u\left(\frac{e_j}{k^{j-1}}\right) = \frac{1}{k^{j-1}}\sum_{i=1}^{j}\alpha_{i,j}e_i = \lambda_j\frac{e_j}{k^{j-1}} + \sum_{i=1}^{j-1}\underbrace{\frac{a_{i,j}}{k^{j-i}}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{}0}\frac{e_i}{k^{i-1}}$$

où les λ_j désignent les valeurs propres de u. Ainsi, en choisissant k suffisamment grand, on peut trouver une base de trigonalisation de u tel que les termes au dessus-de la diagonale soient inférieurs en valeur absolue à $\dfrac{\varepsilon}{n}$ avec $\varepsilon>0$. On fait ce choix de k et on note $\mathrm{A}' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_k}u$, $\mathrm{X} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_k}x$ et $\mathrm{P} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\mathscr{B}_k$ la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}_k$. On définit

$$\|\mathrm{A}\| = \mathrm{N}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}) = \mathrm{N}(\mathrm{A}')\quad\text{avec}\quad \forall\mathrm{M}\in\mathrm{E}\qquad \mathrm{N}(\mathrm{M}) = \sup_{\|\mathrm{X}\|_\infty=1}\|\mathrm{MX}\|_\infty$$

Par suite $$\|\mathrm{A}\| = \sup_{\|\mathrm{X}\|_\infty=1}\ \sup_{i\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]}\left|\sum_{j=1}^{n}a'_{i,j}x_j\right| \leqslant \sup_{i\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]}\sum_{j=1}^{n}\left|a'_{i,j}\right|$$

Comme A' est triangulaire et que les termes au dessus de la diagonale sont inférieurs en valeur absolue à $\dfrac{\varepsilon}{n}$, on a

$$\|\mathrm{A}\|\leqslant\rho(\mathrm{A})+\varepsilon\quad\text{avec}\quad\rho(\mathrm{A}) = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})}|\lambda|$$

La quantité $\rho(\mathrm{A})$ est appelée *rayon spectral* de A. On a choisi une norme subordonnée pour N d'où

$$\forall(\mathrm{M},\mathrm{N})\in\mathrm{E}^2\qquad \|\mathrm{MN}\|\leqslant\|\mathrm{M}\|\|\mathrm{N}\|$$

Par récurrence immédiate, on a donc $\|\mathrm{A}^p\|\leqslant\|\mathrm{A}\|^p$ pour p entier non nul. Comme $\rho(\mathrm{A})\in\,]\,0\,;1\,[$, on peut choisir $\varepsilon>0$ tel que $\rho(\mathrm{A})+\varepsilon\in\,]\,0\,;1\,[$ et par conséquent

$$0\leqslant\|\mathrm{A}^p\|\leqslant\|\mathrm{A}\|^p\xrightarrow[p\to+\infty]{}0$$

Par encadrement, on conclut $$\boxed{\mathrm{A}^p\xrightarrow[p\to+\infty]{}0_{\mathrm{E}}}$$

Remarque : Il s'agit en fait d'une équivalence. Pour le sens direct, soit $\lambda\in\mathbb{C}$ et X normé (on normalise un vecteur propre) tel que $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$. Ainsi, on a $\mathrm{A}^p\mathrm{X} = \lambda^p\mathrm{X}$ pour tout p entier d'où

$$\forall p\in\mathbb{N}\qquad |\lambda|^p = \|\mathrm{A}^p\mathrm{X}\|\leqslant\|\mathrm{A}\|^p\|\mathrm{X}\|$$

On a $|\lambda|^p\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$ d'où $|\lambda|<1$.

Variante : Si on dispose de la continuité des applications linéaires en dimension finie, on peut procéder différemment. On dispose de $\mathrm{P}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \operatorname{diag}(\lambda \mathrm{I}_{m_\lambda} + \mathrm{T}_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})}$$

avec les T_λ triangulaires supérieures strictes. On pose

$$\mathrm{B} = \mathrm{PDP}^{-1} \quad \text{avec} \quad \mathrm{D} = \operatorname{diag}(\lambda \mathrm{I}_{m_\lambda})_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} \quad \text{et} \quad \mathrm{N} = \mathrm{P}\operatorname{diag}(\mathrm{T}_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})}\mathrm{P}^{-1}$$

Ainsi, on a $\mathrm{A} = \mathrm{B}+\mathrm{N}$ avec B diagonalisable, N nilpotente car semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte et un produit par blocs montre $\mathrm{BN} = \mathrm{NB}$. On note ℓ l'ordre de nilpotence de N. Pour p entier, on obtient avec la formule du binôme

$$\mathrm{A}^p = (\mathrm{B}+\mathrm{N})^p = \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{p}{k} \mathrm{B}^{p-k}\mathrm{N}^k$$

On note $\mathrm{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec les $\lambda_i \in \mathrm{D}(0,1)$ puisque ce sont les valeurs propres de A. Pour $\lambda \in \mathrm{D}(0,1)$, on a par croissances comparées

$$\binom{p}{k}\lambda^{p-k} = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}\lambda^{p-k} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{p^k}{k!}\lambda^{p-k} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

On en déduit
$$\binom{p}{k}\mathrm{D}^{p-k} = \operatorname{diag}\left(\binom{p}{k}\lambda_1^{p-k}, \ldots \binom{p}{k}\lambda_n^{p-k}\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0_\mathrm{E}$$

et pour $k \in [\![0\,;\ell-1]\!]$, l'application $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{PMP}^{-1}\mathrm{N}^k$ étant linéaire en dimension finie donc continue, il vient

$$\binom{p}{k}\mathrm{B}^{p-k}\mathrm{N}^k \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0_\mathrm{E}$$

d'où
$$\boxed{\mathrm{A}^p = \sum_{k=0}^{\ell-1}\binom{p}{k}\mathrm{B}^{p-k}\mathrm{N}^k \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0_\mathrm{E}}$$

Exercice 6 (****)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ et $g \in \mathrm{E}$. Pour $f \in \mathrm{E}$, on pose

$$\mathrm{N}(f) = \operatorname*{Sup}_{x\in[\,0\,;1\,]} |f(x)g(x)|$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N soit une norme.
2. Si pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$, $g(x) \neq 0$, montrer que N et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.
3. Démontrer la réciproque de la question précédente.

Corrigé : 1. Supposons qu'il existe $]\,\alpha\,;\beta\,[\, \subset g^{-1}(\{0\})$. Il suffit de prendre $f \in \mathrm{E}$ affine par morceaux, non nulle sur $]\,\alpha\,;\beta\,[$ pour avoir $\mathrm{N}(f) = 0$ ce qui contredit la séparation. Supposons qu'il n'existe aucun intervalle ouvert dans $g^{-1}(\{0\})$. Soit $f \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$. Il existe $x_0 \in [\,0\,;1\,]$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Par continuité de f, il existe $\varepsilon > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $\mathrm{V} = [\,0\,;1\,] \cap \,]\,x_0-\varepsilon\,;x_0+\varepsilon\,[$. Ainsi, on peut trouver un intervalle ouvert $\mathrm{J} \subset \mathrm{V}$ et comme $g_{|\mathrm{J}} \neq 0$, alors $fg_{|\mathrm{J}} \neq 0$ et d'où $\mathrm{N}(f) > 0$. On conclut

$$\boxed{\text{L'application N est une norme si et seulement si } g^{-1}(\{0\}) \text{ ne contient aucun intervalle ouvert.}}$$

2. Soit $f \in \mathrm{E}$. On a clairement $\mathrm{N}(f) \leqslant \|f\|_\infty \times \|g\|_\infty$. Puis, comme $|fg| \in \mathrm{E}$, il existe $x_0 \in [\,0\,;1\,]$ tel que $\mathrm{N}(f) = |fg|\,(x_0) \leqslant |g(x_0)| \times \|f\|_\infty$. Ainsi

$$\boxed{\text{Les normes N et } \|\cdot\|_\infty \text{ sont équivalentes.}}$$

3. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x_0 \in [\,0\,;1\,]$ tel que $g(x_0) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par continuité de g, on a

$$\exists \eta_n > 0 \qquad \forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad |x - x_0| \leqslant \eta_n \quad \Longrightarrow \quad |g(x)| \leqslant \tfrac{1}{n}$$

On définit f_n affine par morceaux avec $f(x_0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour $x \in [\,0\,;1\,]$ tel que $|x - x_0| \geqslant \frac{\eta_n}{2}$. Par construction, on a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\mathrm{N}(f_n) \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi

$$\boxed{\text{N et } \|\cdot\|_\infty \text{ sont équivalentes si et seulement si } g^{-1}(\{0\}) = \varnothing.}$$