ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°25

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn. Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|x\| + \|y\| \leqslant \|x+y\| + \|x-y\|$$

Exercice 2 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,]\,,\mathbb{K})$, $(f_1,\ldots,f_n) \in \mathrm{E}^n$ et $\mathrm{N} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n \qquad \mathrm{N}(x) = \int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n x_i f_i\right|(t)\,\mathrm{d}t$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que l'application N soit une norme.

Exercice 3 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$. On pose

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}_1(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_2(f) = 2\,|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Montrer que N_1 et N_2 sont des normes puis étudier leur équivalence.

Exercice 4 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$. On pose

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

Montrer que N est une norme puis étudier l'équivalence de N et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 5 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ avec $\mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n$, on pose

$$\mathrm{N}_1(\mathrm{P}) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \qquad \mathrm{N}_2(\mathrm{P}) = \operatorname*{Sup}_{t\in[\,0\,;1\,]} |\mathrm{P}(t)| \qquad \mathrm{N}_3(\mathrm{P}) = \operatorname*{Max}_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

1. Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes.
2. Sont-elles équivalentes ?

Exercice 6 (**)

On pose

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \forall (n,\theta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{R}(\theta)^k$$

Étudier la convergence de la suite $(\mathrm{S}_n(\theta))_{n\geqslant 1}$.

Exercice 7 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Déterminer si l'une des deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ vérifie l'inégalité dite de *norme d'algèbre*, à savoir
$$\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$$
2. On suppose E muni d'une norme $\|\cdot\|$. Montrer qu'il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que
$$\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\| \leqslant \mathrm{C}\|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$$

Exercice 8 (**)

Soit A partie non vide de $\mathbb{R}$. On définit N_A sur $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ par

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{N}_\mathrm{A}(\mathrm{P}) = \operatorname*{Sup}_{t\in\mathrm{A}} |\mathrm{P}(t)|$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que N_A soit une norme.

Exercice 9 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. On pose

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \|\mathrm{P}\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t\in[0\,;1]} |\mathrm{P}(t)| \quad \text{et} \quad \|\mathrm{P}\|_1 = \int_0^1 |\mathrm{P}(t)|\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur E puis les comparer.
2. Dans E muni de $\|\cdot\|_\infty$, exhiber une suite bornée sans valeur d'adhérence.