ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°26

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 2$. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur E invariante par conjugaison, c'est-à-dire telle que

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{P}) \in \mathrm{E} \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \qquad \|\mathrm{A}\| = \|\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}\|$$

Exercice 2 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$. On définit l'application N sur E par

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 \,\mathrm{d}t}$$

Montrer que N est une norme puis la comparer à $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 3 (**)

Soient $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2$ deux normes sur E un $\mathbb{K}$-ev.

1. On suppose que les boules unités fermées pour les deux normes sont égales. Montrer $\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_2$.
2. Montrer que le résultat vaut encore s'il s'agit des boules unités ouvertes.

Exercice 4 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On définit la *norme de Frobenius* par $\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^\top \mathrm{A})}$ pour $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$. Montrer que $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ est une norme et qu'elle vérifie

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\|_{\mathrm{F}} \leqslant \|\mathrm{A}\|_{\mathrm{F}} \|\mathrm{B}\|_{\mathrm{F}}$$

Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant l'homogénéité et la séparation. Montrer que N est une norme si et seulement si l'ensemble

$$\mathrm{B} = \{x \in \mathrm{E} \quad | \quad \mathrm{N}(x) \leqslant 1\}$$

est une partie convexe de E.

Exercice 6 (***)

Soit $\mathrm{E} = \{f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. On pose

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_2(f) = \|f + f'\|_\infty$$

Montrer que N_1 et N_2 sont des normes puis les comparer entre elles et ensuite avec $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 7 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k$$

1. Établir $$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id}\,) \oplus \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}\,)$$
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 8 (***)

Soient $p, q > 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et n un entier non nul. On note

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \qquad \|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}$$

1. Montrer $$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad \sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$
2. Montrer que pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^n)^2$, on a $$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \|a\|_p \|b\|_q$$
3. Établir que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.
4. Pour $x \in \mathbb{K}^n$, déterminer $$\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p$$