ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°27

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (***)

On note $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ l'ensemble des suites $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de carré sommable, *i.e* telles que $\sum |u_n|^2$ converge. Montrer que $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev normé par

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$$

Indications : Établir $\qquad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad (a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$

pour montrer que $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev. Pour l'inégalité triangulaire, se ramener à une configuration dans $\mathbb{K}^{\mathrm{N}+1}$ avec N entier muni de la norme deux en posant pour $(u,v) \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})^2$, les suites $u^{\mathrm{N}} = (u_n\delta_{n\leqslant \mathrm{N}})_n$ et $v^{\mathrm{N}} = (v_n\delta_{n\leqslant \mathrm{N}})_n$.

Exercice 2 (***)

Soit $\mathrm{E} = \{f \in \mathscr{C}^2([\,0\,;1\,],\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ muni de

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_2(f) = \|f'' + 2f' + f\|_\infty$$

Justifier que N_1 et N_2 sont des normes puis les comparer.

Indications : Pour étudier la finesse de N_2 par rapport à N_1, pour $f \in \mathrm{E}$, poser $h = f' + f$ et $g = h' + h$ et procéder par variation de la constante pour trouver une expression de f fonction de h et une expression de h fonction de g. Conclure avec diverses inégalités triangulaires.

Exercice 3 (***)

Soient a, b, c et d des réels avec $a < b$ et $c < d$. On pose

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{N}_1(\mathrm{P}) = \operatorname*{Sup}_{t\in[\,a\,;b\,]} |\mathrm{P}(t)| \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_2(\mathrm{P}) = \operatorname*{Sup}_{t\in[\,c\,;d\,]} |\mathrm{P}(t)|$$

Comparer les normes N_1 et N_2.

Indications : Supposer $b > d$ puis considérer $\mathrm{P}_n = (\mathrm{X} - m)^n$ avec $m = \min(a,c)$. Adapter cette idée pour le cas où $a < c$. Conclure en généralisant pour tous les autres cas.

Exercice 4 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev normé et F un sev de E. Montrer

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E} \qquad \mathrm{d}(\lambda x, \mathrm{F}) = |\lambda|\,\mathrm{d}(x, \mathrm{F})$$

Indications : Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $(x,y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}$, observer

$$\|\lambda x - y\| = |\lambda|\,\|x - y/\lambda\| \geqslant |\lambda| \operatorname*{Inf}_{z\in\mathrm{F}} \|x - z\|$$

Conclure en suivant une démarche analogue à celle vue pour l'homogénéité de $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.

Exercice 5 (****)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ avec $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \subset \mathrm{D}(0,1)$. Étudier la convergence de la suite $(\mathrm{A}^p)_p$.

Indications : Choisir $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de trigonalisation de u canoniquement associé à A puis considérer $\mathscr{B}_k = (\varepsilon_1, \varepsilon_2/k, \ldots, \varepsilon_n/k^{n-1})$ avec k entier non nul à choisir pour que les termes au dessus de la diagonale de $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_k} u$ soient, en valeur absolue, inférieurs à $\dfrac{\varepsilon}{n}$ avec $\varepsilon > 0$. Notant $\mathrm{P} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} \mathscr{B}_k$, considérer ensuite une norme sur A définie par

$$\|\mathrm{A}\| = \mathrm{N}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}) \quad \text{avec} \quad \mathrm{N}(\mathrm{M}) = \sup_{\|\mathrm{X}\|_\infty = 1} \|\mathrm{MX}\|_\infty$$

Montrer que ce choix de norme garantit l'inégalité dite de *norme d'algèbre* $\|\mathrm{MN}\| \leqslant \|\mathrm{M}\|\|\mathrm{N}\|$ pour $(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$.

Exercice 6 (****)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ et $g \in \mathrm{E}$. Pour $f \in \mathrm{E}$, on pose

$$\mathrm{N}(f) = \sup_{x \in [\,0\,;1\,]} |f(x)g(x)|$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N soit une norme.
2. Si pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$, $g(x) \neq 0$, montrer que N et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.
3. Démontrer la réciproque de la question précédente.

Indications : 1. Supposer qu'il existe $]\,\alpha\,;\beta\,[\; \subset g^{-1}(\{0\})$ et obtenir une contradiction. Puis considérer l'hypothèse contraire.
3. Si $g(x_0) = 0$ avec $x_0 \in [\,0\,;1\,]$, il existe $\eta_n > 0$ tel que $g(x) \leqslant \dfrac{1}{n}$ pour pour $|x - x_0| \leqslant \eta_n$. Construire alors $f_n \in \mathrm{E}$ telle que $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\mathrm{N}(f_n) \leqslant \dfrac{1}{n}$.