ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°16

Exercice 1 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\ f \oplus \mathrm{Ker}\ f$
2. $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\ f + \mathrm{Ker}\ f$
3. $\mathrm{Im}\ f^2 = \mathrm{Im}\ f$
4. $\mathrm{Ker}\ f^2 = \mathrm{Ker}\ f$

Corrigé : On a (1) $\Rightarrow$ (2) clairement. Supposons (2). On a toujours $\mathrm{Im}\ f^2 \subset \mathrm{Im}\ f$. Soit $y \in \mathrm{Im}\ f$. Il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$. Et il existe $(a, b) \in \mathrm{E} \times \mathrm{Ker}\ f$ tel que $x = f(a) + b$ d'où $y = f(x) = f(f(a) + b) = f^2(a) \in \mathrm{Im}\ f^2$. Ainsi, on a $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Im}\ f^2$ donc (2) $\Rightarrow$ (3). On a toujours $\mathrm{Ker}\ f \subset \mathrm{Ker}\ f^2$. D'après le théorème du rang et par égalité dimensionnelle, il vient (3) $\Rightarrow$ (4). Enfin, supposons (4). Soit $x \in \mathrm{Im}\ f \cap \mathrm{Ker}\ f$. Il existe $t \in \mathrm{E}$ tel que $x = f(t)$ et $f^2(t) = f(x) = 0$ d'où $t \in \mathrm{Ker}\ f^2$. Or $\mathrm{Ker}\ f^2 = \mathrm{Ker}\ f$ d'où $f(t) = 0$ *i.e.* $x = 0$. Le théorème du rang fournit l'égalité dimensionnelle qui permet de conclure que (4) $\Rightarrow$ (1). Ainsi

$$\boxed{\text{Les quatre assertions sont équivalentes.}}$$

Exercice 2 (*)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $(f, g) \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})^2$. Montrer

$$|\mathrm{rg}\,(f) - \mathrm{rg}\,(g)| \leqslant \mathrm{rg}\,(f + g) \leqslant \mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g$$

Corrigé : Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $(f, g) \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})^2$. On a clairement

$$\mathrm{Im}\,(f + g) = \{f(x) + g(x),\ x \in \mathrm{E}\} \subset \mathrm{Im}\ f + \mathrm{Im}\ g = \{f(x) + g(y),\ (x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}\}$$

Passant aux dimensions, il vient

$$\mathrm{rg}\,(f + g) \leqslant \dim\,(\mathrm{Im}\ f + \mathrm{Im}\ g)$$

D'après la formule de Grassmann, on sait que

$$\dim\,(\mathrm{Im}\ f + \mathrm{Im}\ g) = \mathrm{rg}\ f + \mathrm{rg}\ g - \dim \mathrm{Im}\ f \cap \mathrm{Im}\ g \leqslant \mathrm{rg}\ f + \mathrm{rg}\ g$$

d'où
$$\boxed{\mathrm{rg}\,(f + g) \leqslant \mathrm{rg}\ f + \mathrm{rg}\ g}$$

Ensuite, avec l'inégalité précédemment établie, en remarquant $\mathrm{rg}\,(-g) = \mathrm{rg}\ g$, il vient

$$\mathrm{rg}\ f = \mathrm{rg}\,(f + g - g) \leqslant \mathrm{rg}\,(f + g) + \mathrm{rg}\,(-g) = \mathrm{rg}\,(f + g) + \mathrm{rg}\ g$$

d'où
$$\mathrm{rg}\ f - \mathrm{rg}\ g \leqslant \mathrm{rg}\,(f + g)$$

Par symétrie des rôles en f et g, on a également

$$\mathrm{rg}\ g - \mathrm{rg}\ f \leqslant \mathrm{rg}\,(f + g)$$

On conclut
$$\boxed{|\mathrm{rg}\ f - \mathrm{rg}\ g| \leqslant \mathrm{rg}\,(f + g) \leqslant \mathrm{rg}\ f + \mathrm{rg}\ g}$$

Exercice 3 (*)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec A triangulaire supérieure stricte. Montre que $\mathrm{A}^n = 0$.

Corrigé : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Notons $$\mathscr{P}(k) : \quad f^k(e_k) = 0$$

La propriété $\mathscr{P}(1)$ est vraie. Supposons $\mathscr{P}(i)$ vraie pour tout $i \in [\![1\,;\, k]\!]$ avec $k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$ fixé. Compte-tenu de la forme triangulaire supérieure stricte, on a dispose de scalaires α_i tels que

$$f^{k+1}(e_{k+1}) = f^k(f(e_{k+1})) = f^k\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{k} f^{k-i} \circ f^i(e_i) = 0_{\mathrm{E}}$$

ce qui clôt la récurrence. Par conséquent, on a $f^n(e_k) = f^{n-k} \circ f^k(e_k) = 0_{\mathrm{E}}$ pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$ et par caractérisation d'une application linéaire sur une base, on conclut

$$\boxed{f^n = 0}$$

Exercice 4 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul. On pose

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} - \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$$

Justifier que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis calculer φ^2 et $\operatorname{Tr} \varphi$.

Corrigé : L'application φ est à valeurs dans E, linéaire par linéarité de la trace et du produit.

On trouve $$\boxed{\varphi^2 = \varphi}$$

L'application φ est le projecteur sur $\operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(\mathrm{I}_n)$. En considérant une base adaptée, on en déduit

$$\boxed{\operatorname{Tr} \varphi = n^2 - 1}$$

Exercice 5 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\Phi : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^\top$. Calculer $\det \Phi$.

Corrigé : L'application Φ est la symétrie par rapport à $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$. En considérant une base adaptée, on a donc

$$\boxed{\det \Phi = (-1)^{\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K})} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

Exercice 6 (**)

Soient p et q des projecteurs de E. Montrer

$$p + q \text{ projecteur} \iff p \circ q = q \circ p = 0$$

Quand cette condition est réalisée, montrer que

$$\operatorname{Im} p + q = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q \qquad \operatorname{Ker} p + q = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$$

Corrigé : On a $$p+q \text{ projecteur} \iff p\circ q+q\circ p=0$$
Le sens indirect est évident. Pour le sens direct, on compose par exemple par p à droite puis à gauche et on trouve

$$p\circ q=-p\circ q\circ p=q\circ p$$

D'où sa nullité. Supposons la condition réalisée. L'inclusion $\text{Im}\ p+q\subset \text{Im}\ p+\text{Im}\ q$ est immédiate. Pour la réciproque, soit $x=p(a)+q(b)$ avec $(a,b)\in \text{E}^2$. On a

$$(p+q)(x)=(p+q)(p(a)+q(b))=p(a)+p\circ q(a)+q\circ p(b)+q(b)=x$$

Puis, on a clairement $\text{Ker}\ p\cap \text{Ker}\ q\subset \text{Ker}\ p+q$. Si $x\in \text{K}erp+q$, on a $(p+q)(x)=0$. En appliquant p ou q à cette relation, il vient

$$p\circ(p+q)(x)=p(x)=0\quad \text{et}\quad q\circ(p+q)(x)=q(x)=0$$

Ainsi $$\boxed{\text{Im}\ p+q=\text{Im}\ p+\text{Im}\ q\quad \text{et}\quad \text{Ker}\ p+q=\text{Ker}\ p\cap\text{Ker}\ q}$$

Exercice 7 (**)

Soit $\text{E}=\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\text{H}\in\text{E}$ avec $\text{rg}\ \text{H}=1$.

1. Montrer que H est semblable à $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \dots & \alpha_n\\ 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$ avec les α_i réels.

2. Montrer $\qquad \forall \text{A}\in\text{GL}_n(\mathbb{R})\qquad \det(\text{A}-\text{H})\det(\text{A}+\text{H})\leqslant \det(\text{A})^2$

Corrigé : 1. Notons $h\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à H. On a $\text{Im}\ h=\text{Vect}\,(\varepsilon_1)$ avec ε_1 un vecteur non nul que l'on complète en $\mathscr{B}=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ une base de E. On a $h(\varepsilon_i)\in\text{Im}\ h=\text{Vect}\,(\varepsilon_1)$ pour tout $i\in[\![1\,;n]\!]$ d'où

$$\forall i\in[\![1\,;n]\!]\quad \exists\alpha_i\in\mathbb{R}\quad |\quad h(\varepsilon_i)=\alpha_i\varepsilon_1$$

Ainsi, la matrice de h dans la base $\mathscr{B}$ a la forme attendue et par caractérisation géométrique de la similitude, on conclut

$$\boxed{\text{La matrice H est semblable à }\begin{pmatrix}\alpha_1 & \dots & \alpha_n\\ 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\text{ avec les }\alpha_i\text{ réels.}}$$

2. Soit $\text{A}\in\text{GL}_n(\mathbb{R})$. En factorisant, on obtient

$$\det(\text{A}-\text{H})\det(\text{A}+\text{H})=\det(\text{A})^2\det(\text{I}_n-\text{K})\det(\text{I}_n+\text{K})\quad \text{avec}\quad \text{K}=\text{A}^{-1}\text{H}$$

Comme $\text{A}^{-1}\in\text{GL}_n(\mathbb{R})$, on a $\text{rg}\ \text{K}=1$. Soit $\text{P}\in\text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\text{L}=\text{P}^{-1}\text{KP}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \dots & \alpha_n\\ 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\text{ avec les }\alpha_i\text{ réels}$$

Ainsi

$$\det(\mathrm{I}_n+\mathrm{K})\det(\mathrm{I}_n-\mathrm{K}) = \det(\mathrm{I}_n+\mathrm{L})\det(\mathrm{I}_n-\mathrm{L}) = \begin{vmatrix} 1-\alpha_1^2 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1-\alpha_1^2 \leqslant 1$$

Par conséquent $\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \qquad \det(\mathrm{A}-\mathrm{H})\det(\mathrm{A}+\mathrm{H}) \leqslant \det \mathrm{A}^2}$

Exercice 8 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f_1,\dots,f_r$ des endomorphismes de E tels que $\sum\limits_{i=1}^{r} f_i = \mathrm{id}$ et $\sum\limits_{i=1}^{r} \mathrm{rg}\,(f_i) \leqslant n$. Montrer

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, r]\!]^2 \qquad f_i \circ f_j = \delta_{i,j} f_i \quad \text{et} \quad \mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Im}\ f_i$$

Corrigé : On a $\sum\limits_{i=1}^{r} f_i = \mathrm{id}$ d'où $\mathrm{E} = \mathrm{Im} \sum\limits_{i=1}^{r} f_i \subset \sum\limits_{i=1}^{r} \mathrm{Im}\ f_i \subset \mathrm{E}$
et les inclusions sont donc des égalités. Passant à la dimension, on obtient

$$\dim \mathrm{E} = \dim \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Im}\ f_i \leqslant \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{Im}\ f_i \leqslant \dim \mathrm{E}$$

donc les inégalités sont des égalités et il en résulte que $\mathrm{E} = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} \mathrm{Im}\ f_i$. Enfin, pour $x \in \mathrm{E}$, on a

$$\forall i \in [\![1\,;\, r]\!] \qquad f_i(x) = \sum_{j=1}^{r} f_i \circ f_j(x)$$

et par unicité de la décomposition dans $\bigoplus\limits_{i=1}^{r} \mathrm{Im}\ f_i$, il vient

$$f_i(x) = f_i^2(x) \quad \text{et} \quad f_i \circ f_j(x) = 0$$

D'où $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1\,;\, r]\!]^2 \qquad f_i \circ f_j = \delta_{i,j} f_i \quad \text{et} \quad \mathrm{E} = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} \mathrm{Im}\ f_i}$

Exercice 9 (*)

Soient α, β dans $\mathbb{K}$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour avoir A semblable à B.

Corrigé : Supposons A et B semblables. Alors, les matrices ont même trace et même déterminant d'où

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha\beta = -\alpha\beta \end{cases}$$

et par conséquent $\alpha = \beta = 0$. La réciproque est immédiate et on conclut

$$\boxed{\text{Les matrices } \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \text{ sont semblables si et seulement si } \alpha = \beta = 0.}$$

Remarque : On peut aussi invoquer l'égalité $\chi_{\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{B}}$, ou aussi A^2 semblable à B^2 ...

Exercice 10 (**)

Soit n entier et $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$ pour $k \in [\![0 ; n]\!]$. Montrer que $\mathscr{B} = (P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer les coordonnées de la base canonique $\mathscr{C} = (X^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Corrigé : Les polynômes P_k sont échelonnées en valuation et forme donc une famille libre de $n+1$ vecteurs dans un espace de dimension $n+1$ ce qui prouve que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Puis, pour $j \in [\![0 ; n]\!]$, on a

$$X^j = X^j(1-X+X)^{n-j} = X^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k}(1-X)^k X^{n-j-k} = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k}(1-X)^k X^{n-k}$$

Ainsi $\boxed{\text{La famille } \mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X] \text{ et on a } X^j = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} P_{n-k} \text{ pour } j \in [\![0 ; n]\!].}$

Remarque : On peut aussi observer que la famille $\mathscr{B}$ est génératrice de cardinal égal à $\dim \mathbb{R}_n[X]$ pour conclure qu'il s'agit d'une base.

Exercice 11 (**)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Corrigé : Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$ ce qui équivaut à $AP = PB$. Notons $P_1 = \operatorname{Re} P$ et $P_2 = \operatorname{Im} P$. Ainsi, on a $AP_1 = P_1B$ et $AP_2 = P_2B$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{C} \qquad \varphi(t) = \det(P_1 + tP_2)$$

On a φ polynomiale en t et $\varphi(i) = \det(P_1 + iP_2) = \det P \neq 0$. Par suite, il existe α réel tel que $\varphi(\alpha) \neq 0$ (sinon, φ aurait une infinité de racines et serait dont le polynôme nul). Il s'ensuit

$$A(P_1 + \alpha P_2) = (P_1 + \alpha P_2)B \quad \text{et} \quad \det(P_1 + iP_2) \neq 0$$

On conclut $\boxed{\text{A et B sont semblables sur } \mathbb{R}.}$

Exercice 12 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et F un sev de E de dimension $n-p$ $(p \leqslant n)$. Montrer qu'il existe $H_1, \ldots H_p$ hyperplans de E tels que $F = \bigcap_{k=1}^{p} H_k$.

Corrigé : Soit $(\varepsilon_{p+1}, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de F que l'on complète par la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ telle que $(\varepsilon_i)_{i[\![1 ; n]\!]}$ est une base de E. Pour $k \in [\![1 ; p]\!]$, posons

$$\varphi_k : E \to \mathbb{K}, \; x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i \mapsto \alpha_i$$

On a clairement φ_k forme linéaire non nulle de E et $\bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker} \varphi_k = F$. Ainsi

$$\boxed{\text{Il existe } H_1, \ldots H_p \text{ hyperplans de E tels que } F = \bigcap_{k=1}^{p} H_k.}$$

Variante : On peut aussi écrire $H_k = \operatorname{Vect}(\varepsilon_i)_{i \in [\![1 ; n]\!] \smallsetminus \{k\}}$ pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$.

Exercice 13 (**)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. On note

$$\mathrm{G} = \{g \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid g \circ f = f \circ g = 0\}$$

Vérifier que G est un sev de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis déterminer $\dim \mathrm{G}$.

Corrigé : L'ensemble G est clairement un sev de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Soit $g \in \mathrm{G}$. On a

$$\mathrm{Im}\ f \subset \mathrm{Ker}\ g \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\ g \subset \mathrm{Ker}\ f$$

Soit $\mathscr{B}_1$ une base de $\mathrm{Im}\ f$ que l'on complète en $\mathscr{B}$ une base de E. Soit $\mathscr{B}'_1$ une base de $\mathrm{Ker}\ f$ que l'on complète en $\mathscr{B}'$ une base de E. Pour $g \in \mathrm{G}$, on a la matrice par blocs

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} g = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{A} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n-r}(\mathbb{K})$$

où $n = \dim \mathrm{E}$ et $r = \mathrm{rg}\ f$. Réciproquement, pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n-r}(\mathbb{K})$, on peut considérer g dont la matrice dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ est donnée par $\left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{A} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ et on vérifie sans difficulté que $g \in \mathrm{G}$. Ainsi, l'ensemble G est isomorphe à $\mathscr{M}_{n-r}(\mathbb{K})$ et on conclut

$$\boxed{\dim \mathrm{G} = (\dim \mathrm{E} - \mathrm{rg}\ f)^2}$$

Exercice 14 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On note

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{N}_k = \mathrm{Ker}\ f^k \qquad \mathrm{I}_k = \mathrm{Im}\ f^k$$

1. Montrer que les suites $(\mathrm{I}_k)_k$ et $(\mathrm{N}_k)_k$ sont respectivement décroissante et croissante et qu'elles sont simultanément stationnaires.
2. On note r le rang à partir duquel les suites stationnent. Montrer $\mathrm{E} = \mathrm{I}_r \oplus \mathrm{N}_r$.
3. En déduire que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{C} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{N} \end{array}\right)$ où C une matrice carrée inversible et N est une matrice carré nilpotente.

Corrigé : 1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathrm{E}$. On a

$$f^k(x) = 0_\mathrm{E} \quad \Longrightarrow \quad f(f^k(x)) = f^{k+1}(x) = 0_\mathrm{E} \quad \text{et} \quad y = f^{k+1}(x) \quad \Longrightarrow \quad y = f^k(f(x))$$

D'où
$$\mathrm{Ker}\ f^k \subset \mathrm{Ker}\ f^{k+1} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\ f^{k+1} \subset \mathrm{Im}\ f^k$$

Ainsi
$$\boxed{\text{La suite } (\mathrm{N}_k)_k \text{ croît et la suite } (\mathrm{I}_k)_k \text{ décroît.}}$$

Il s'ensuit que les suite $(\dim \mathrm{N}_k)_k$ et $(\dim \mathrm{I}_k)_k$ sont respectivement croissantes et décroissantes. Comme $(\dim \mathrm{I}_k)_k$ est décroissante à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle est stationnaire à partir d'un certain rang et d'après le théorème du rang, la suite $(\dim \mathrm{N}_k)_k$ est stationnaire à partir du même rang. Par inclusion et égalité des dimensions, on conclut

$$\boxed{\text{Les suites } (\mathrm{I}_k)_k \text{ et } (\mathrm{N}_k)_k \text{ sont simultanément stationnaires.}}$$

Remarque : On peut établir un résultat plus précis : la stricte monotonie de ces suites avant la stationnarité. En effet, supposons qu'il existe $\ell < r$ tel que $\mathrm{N}_\ell = \mathrm{N}_{\ell+1}$. On établit alors par récurrence $\mathrm{N}_k = \mathrm{N}_{k+1}$ pour tout $k \geqslant \ell$. En effet, soit $x \in \mathrm{N}_{k+2}$, alors $f(x) \in \mathrm{N}_{k+1} = \mathrm{N}_k$ d'où $x \in \mathrm{N}_{k+1}$. On en déduit que la suite $(\mathrm{N}_k)_k$ stationne à partir de ℓ avec $\ell < r$ ce qui est absurde.

2. Soit $x \in \mathrm{I}_r \cap \mathrm{N}_r$. On a

$$f^r(x) = 0_{\mathrm{E}} \quad \text{et} \quad x = f^r(t) \quad \text{avec} \quad t \in \mathrm{E}$$

Par suite, on a $f^r(x) = f^{2r}(t) = 0_{\mathrm{E}}$ d'où $t \in \mathrm{N}_{2r}$. Or la suite $(\mathrm{N}_k)_k$ stationne à partir de r d'où $\mathrm{N}_{2r} = \mathrm{N}_r$ et par conséquent $t \in \mathrm{N}_r$ et donc $x = f^r(t) = 0_{\mathrm{E}}$. Le théorème du rang donne

$$\dim \mathrm{I}_r + \dim \mathrm{N}_r = \dim \mathrm{E}$$

On conclut $\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{I}_r \oplus \mathrm{N}_r}$

3. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A. Les sous-espaces I_r et N_r sont clairement stables par f. Notant $\mathscr{B} = \mathscr{B}_{\mathrm{I}} \uplus \mathscr{B}_{\mathrm{N}}$ une base adaptée à la somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{I}_r \oplus \mathrm{N}_r$, on en déduit la forme diagonale par blocs de $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f$. Notons respectivement f_{I_r} et f_{N_r} les endomorphismes induits par f respectivement sur I_r et N_r. On a clairement $(f_{\mathrm{N}_r})^r = 0$ d'où $\mathrm{N} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{N}}} f_{\mathrm{N}_r}$ matrice nilpotente. Puis

$$\mathrm{Ker}\ f_{\mathrm{I}_r} = \mathrm{N}_1 \cap \mathrm{I}_r \subset \mathrm{N}_r \cap \mathrm{I}_r = \{0_{\mathrm{E}}\}$$

D'où f_{I_r} injectif et donc bijectif. On peut aussi rédiger $f_{\mathrm{I}_r}(\mathrm{I}_r) = \mathrm{I}_r$ par stationnarité d'où la surjectivité et donc la bijectivité. Ainsi, la matrice $\mathrm{C} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{I}}} f_{\mathrm{I}_r}$ est inversible et comme A et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f$ sont les matrices d'un même endomorphisme dans des bases éventuellement distinctes, on conclut

$$\boxed{\text{A semblable à } \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{C} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{N} \end{array}\right) \text{ avec C inversible et N nilpotente}}$$