Feuille d'exercices n°17

Exercice 1 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\operatorname{rg} \mathrm{A} = 1$ et $\operatorname{Tr}(\mathrm{A}) = 0$. Montrer que A est semblable à $\mathrm{E}_{1,n}$.

Corrigé : On a $\mathrm{A}^2 = \operatorname{Tr}(\mathrm{A})\mathrm{A}$ (résultat à savoir redémontrer) d'où $\mathrm{A}^2 = 0$. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$ et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ canoniquement associé à A. D'après le théorème du rang, on a $\dim \operatorname{Ker} u = n-1$. Soit $\varepsilon_1 \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$ tel que $\operatorname{Vect}(\varepsilon_1) = \operatorname{Im} u$. Il existe $\varepsilon_n \in \mathrm{E}$ tel que $u(\varepsilon_n) = \varepsilon_1$ d'où $u(\varepsilon_1) = u^2(\varepsilon_n) = 0_\mathrm{E}$. On complète ensuite (ε_1) en $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ base de $\operatorname{Ker} u$. La famille $\mathscr{B} = (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ ainsi construite est libre. En effet, soit $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i = 0_\mathrm{E}$. On applique u et il vient $\alpha_n \varepsilon_1 = 0_\mathrm{E}$ d'où $\alpha_n = 0$ puis la nullité des autres α_i par liberté de $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$. La famille $\mathscr{B}$ est libre, de cardinal égal à $\dim \mathrm{E}$ ce qui en fait donc une base et on a $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} u = \mathrm{E}_{1,n}$. On conclut

$$\boxed{\text{Les matrices A et } \mathrm{E}_{1,n} \text{ sont semblables.}}$$

Exercice 2 (**)

Soit n entier non nul, $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Pour tout $i \in [\![0\,;\, n]\!]$, on pose

$$\mathrm{F}_i = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \mid \forall j \in [\![0\,;\, n]\!] \setminus \{i\}, \mathrm{P}(j) = 0\}$$

Vérifier que les F_i sont des sev de E et montrer que $\mathrm{E} = \bigoplus\limits_{i=0}^{n} \mathrm{F}_i$.

Corrigé : On note $(\mathrm{L}_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ la famille des polynômes de Lagrange associés à $0, 1, \ldots, n$. Soit $i \in [\![0\,;\, n]\!]$. On a

$$\mathrm{P} \in \mathrm{F}_i \iff \prod_{j \in [\![0\,;\, n]\!] \setminus \{i\}} (\mathrm{X} - j) | \mathrm{P} \iff \mathrm{L}_i | \mathrm{P}$$

Comme $\deg \mathrm{P} \leqslant n$, on en déduit $\mathrm{F}_i = \operatorname{Vect}(\mathrm{L}_i)$. Puis, pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, on a $\mathrm{P} = \sum\limits_{i=0}^{n} i \mathrm{L}_i$ par interpolation ce qui prouve $\mathrm{E} = \sum\limits_{i=0}^{n} \mathrm{F}_i$. Enfin, pour $(\mathrm{P}_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in \prod\limits_{i=0}^{n} \mathrm{F}_i$ tel que $\sum\limits_{i=0}^{n} \mathrm{P}_i = 0$, il vient pour $j \in [\![1\,;\, n]\!]$

$$\sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}_i(j) = \mathrm{P}_j(j) = 0$$

et le polynôme P_j admet donc $n+1$ racines distinctes ce qui prouve $\mathrm{P}_j = 0$. On conclut

$$\boxed{\text{Les } \mathrm{F}_i \text{ sont des sev de E et } \mathrm{E} = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathrm{F}_i.}$$

Exercice 3 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\mathrm{A}^{n-1} \neq 0$ et $\mathrm{A}^n = 0$. Montrer que A est semblable à B avec

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Corrigé : Supposons le problème résolu. Notant $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A, il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $u(e_i) = e_{i-1}$ pour $i \in [\![2\,;\, n]\!]$ et $u(e_1) = 0$, autrement dit $e_i = u^{n-i}(e_n)$ pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$. Il suffit alors de choisir $x \in \mathrm{E}$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. La famille $(u^{n-1}(x), \dots, x)$ est libre. En effet, soit $(\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ une famille de scalaires tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x) = 0_{\mathrm{E}}$. On suppose les α_k non tous nuls et on pose $p = \min\{k \in [\![0\,;\, n-1]\!] \mid \alpha_k \neq 0\}$. On a

$$u^{n-p-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x)\right) = \alpha_p u^{n-1}(x) + 0_{\mathrm{E}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_p = 0$$

ce qui est en contradiction avec le choix de p. Enfin, dans cette base, la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ a la forme souhaitée.

$$\boxed{\text{Les matrices A et B sont semblables.}}$$

Exercice 4 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n entier non nul et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ base de E. On pose

$$\mathscr{C}(u) = \{v \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid v \circ u = u \circ v\}$$

1. Montrer que $\mathscr{C}(u)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer $$\mathscr{C}(u) = \mathbb{K}_{n-1}[u]$$
3. Déterminer $\dim \mathscr{C}(u)$.

Corrigé : 1. On vérifie sans difficulté que $\mathrm{id} \in \mathscr{C}(u)$, $\mathscr{C}(u)$ sev de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $v \circ w \in \mathscr{C}(u)$ pour v, w dans $\mathscr{C}(u)$. Ainsi

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathscr{C}(u) \text{ est une sous-algèbre de } \mathscr{L}(\mathrm{E}).}$$

2. On a clairement $\mathbb{K}_{n-1}[u] \subset \mathscr{C}(u)$. Réciproquement, soit $v \in \mathscr{C}(u)$. Le vecteur $v(x_0)$ se décompose dans la base $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ en

$$v(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) \quad \text{avec} \quad (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$$

Soit $i \in [\![0\,;\, n-1]\!]$. Comme v commute avec u, alors v commute avec u^i pour tout $i \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ puis

$$\begin{aligned} v\left(u^i(x_0)\right) &= u^i \circ v(x_0) = u^i\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)\right) \\ &= u^i \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k\right)(x_0) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k\right)\left(u^i(x_0)\right) \end{aligned}$$

Ainsi, les endomorphismes v et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$ coïncident sur la base $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ et sont donc égaux ce qui prouve l'inclusion directe. On conclut

$$\boxed{\mathscr{C}(u) = \left\{\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k,\ (a_i)_{i\in[\![\,0\,;\,n-1\,]\!]} \in \mathbb{K}^n\right\}}$$

Variante : Soit $x \in \mathrm{E}$. Il existe $(b_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1} \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k u^k(x_0)$. Ainsi

$$\begin{aligned} v(x) = v\left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k(x_0)\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} b_k v \circ u^k(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k \circ v(x_0) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell u^\ell(x_0)\right) = \sum_{0\leqslant k,\ell\leqslant n-1} a_\ell b_k u^{k+\ell}(x_0) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell u^\ell(x) \end{aligned}$$

3. D'après ce qui précède, la famille $(u^k)_{k\in[\![\,0\,;\,n-1\,]\!]}$ est génératrice de $\mathscr{C}(u)$. Montrons sa liberté. Soit $(a_k)_{k\in[\![\,0\,;\,n-1\,]\!]} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k u^{k-1} = 0$. En particulier, en évaluant en x_0, il vient $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) = 0$. Or la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E donc libre et par suite

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall k \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!] \qquad a_k = 0$$

Ainsi, la famille $(u^k)_{k\in[\![\,0\,;\,n-1\,]\!]}$ est libre et génératrice de $\mathscr{C}(u)$ donc est une base de $\mathscr{C}(u)$. Son cardinal étant égal à n, on conclut

$$\boxed{\dim \mathscr{C}(u) = n}$$

Exercice 5 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$. On pose

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \Phi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} - \mathrm{MB}$$

1. Vérifier que $\Phi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer $\qquad \forall (\mathrm{M}, p) \in \mathrm{E} \times \mathbb{N} \qquad \Phi^p(\mathrm{M}) = \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k \mathrm{A}^{p-k}\mathrm{M}\mathrm{B}^k$
3. Montrer que si A et B sont nilpotentes, alors Φ l'est aussi.

Corrigé : 1. L'application Φ est valeurs dans E par définition des opérations matricielles et par linéarité du produit à gauche et à droite et de la somme, on conclut

$$\boxed{\Phi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

2. On pose $f(\mathrm{M}) = \mathrm{AM}$ et $g(\mathrm{M}) = \mathrm{MB}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Les applications f et g sont également des endomorphismes de E et on observe

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad f \circ g(\mathrm{M}) = \mathrm{AMB} = g \circ f(\mathrm{M})$$

autrement dit f et g commutent. D'après la formule du binôme, on a

$$\Phi^p = (f - g)^p = \sum_{k=0}^{k} \binom{p}{k} (-1)^k f^{p-k} \circ g^k$$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall (\mathrm{M}, p) \in \mathrm{E} \times \mathbb{N} \qquad \Phi^p(\mathrm{M}) = \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k \mathrm{A}^{p-k}\mathrm{M}\mathrm{B}^k}$

3. Si $\mathrm{A}^p = 0$ et $\mathrm{B}^q = 0$, alors pour $k \in [\![\,0\,;\,p+q\,]\!]$, on a $k \geqslant p$ ou $p + q - k \geqslant q$ d'où $\Phi^{p+q} = 0$. On conclut

$$\boxed{\text{Si A et B sont nilpotentes, alors } \Phi \text{ l'est aussi.}}$$

Exercice 6 (***)

1. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $(x, f(x))$ est liée pour tout $x \in \mathrm{E}$. Montrer que f est une homothétie.
2. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable une matrice de diagonale nulle.

Corrigé : 1. Considérons $x \neq 0_{\mathrm{E}}$. On a $f(x) = \lambda_x x$ avec $\lambda_x \in \mathbb{K}$. Soit $y \in \mathrm{E}$ tel que (x, y) libre. On a

$$f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$$

Soit $y \in \mathrm{E}$ non nul colinéaire à x. On a $y = \alpha x$ et

$$f(y) = \lambda_y \alpha x = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x \quad \Longrightarrow \quad \lambda_y = \lambda_x$$

Ainsi, le scalaire λ_x ne dépend pas du choix de x non nul et pour $x = 0$, le résultat vaut aussi d'où

$$\boxed{f \in \operatorname{Vect}(\mathrm{id})}$$

2. On procède par récurrence en supposant le résultat vrai pour une matrice de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$. Si A est nulle, le résultat est trivial. On suppose $\mathrm{A} \neq 0$. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A. On a $f \notin \operatorname{Vect}(\mathrm{id})$. Sinon, on aurait $\operatorname{Tr}(f) = n\lambda = 0$ d'où $\lambda = 0$ donc $f = 0$ ce qui est exclu. D'après ce qui précède, il existe $x \in \mathrm{E}$ non nul tel que $(x, f(x))$ libre. En complétant en $\mathscr{B}$ une base de E, on a

$$\mathrm{M} = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}} f = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{U} & \mathrm{A}' \end{array}\right) \qquad \text{avec} \quad \mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

et $\operatorname{Tr}(f) = \operatorname{Tr}(\mathrm{A}') = 0$ avec $\mathrm{A}' \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Par hypothèse de récurrence, A′ est semblable à une matrice $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ de trace nulle. Donc, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ tel que $\mathrm{B} = \mathrm{PA}'\mathrm{P}^{-1}$. Posant $\mathrm{Q} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{P} \end{array}\right)$, on a Q inversible avec $\mathrm{Q}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{P}^{-1} \end{array}\right)$ et un produit par blocs donne

$$\mathrm{QMQ}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{P} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{U} & \mathrm{A}' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{P}^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{BP}^{-1} \\ \hline \mathrm{PU} & \mathrm{PA}'\mathrm{P}^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{BP}^{-1} \\ \hline \mathrm{PU} & \mathrm{B} \end{array}\right)$$

qui est de diagonale nulle ce qui clôt la récurrence. Ainsi

$$\boxed{\text{Une matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.}}$$

Exercice 7 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n entier non nul.

1. Soient u, v dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer
$$\operatorname{rg}(v) - \operatorname{rg}(u \circ v) \leqslant \dim \operatorname{Ker} u$$
2. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ nilpotent d'indice p.
   (a) Montrer que la suite $(\operatorname{Ker} u^k)_k$ croît strictement puis stationne.
   (b) Établir $\qquad \dfrac{n}{p} \leqslant \dim \operatorname{Ker} u \leqslant n - p + 1$

Corrigé : 1. En appliquant le théorème du rang à $u_{|_{\mathrm{Im}\ v}}$, il vient

$$\mathrm{rg}\,(v) = \mathrm{rg}\,(u \circ v) + \dim \mathrm{Ker}\ u \cap \mathrm{Im}\ v$$

D'où $$\boxed{\mathrm{rg}\,(v) - \mathrm{rg}\,(u \circ v) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\ u}$$

2.(a) La suite $(\mathrm{Ker}\ u^k)_k$ est clairement croissante et stationnaire puisque $u^k = 0$ pour tout $k \geqslant p$. Supposons $\mathrm{Ker}\ u^\ell = \mathrm{Ker}\ u^{\ell+1}$ avec $\ell < p$ et notons $\mathscr{P}(k)$: $\mathrm{Ker}\ u^k = \mathrm{Ker}\ u^{k+1}$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie pour $k \geqslant \ell$. Si $x \in \mathrm{Ker}\ u^{k+2}$, on a $u(x) \in \mathrm{Ker}\ u^{k+1} = \mathrm{Ker}\ u^k$ d'où $x \in \mathrm{Ker}\ u^{k+1}$ ce qui prouve $\mathscr{P}(k+1)$ vraie. Par conséquent, la suite $\left(\mathrm{Ker}\ u^k\right)_k$ stationne à partir de $\ell < p$ et $\mathrm{Ker}\ u^\ell = \mathrm{Ker}\ u^p = \mathrm{E}$ ce qui est absurde par choix de p, ordre de nilpotence. Ainsi

$$\boxed{\{0_{\mathrm{E}}\} = \mathrm{Ker}\ u^0 \subsetneq \mathrm{Ker}\ u \subsetneq \ldots \subsetneq \mathrm{Ker}\ u^p = \mathrm{E}}$$

2.(b) D'après le résultat de la question 1, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{rg}\,(u^k) - \mathrm{rg}\,(u^{k+1}) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\ u$$

Par sommation téléscopique, on trouve

$$\sum_{k=0}^{p-1} \left[\mathrm{rg}\,(u^k) - \mathrm{rg}\,(u^{k+1})\right] = \mathrm{rg}\,(u^0) - \mathrm{rg}\,(u^p) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{id}\,) = n \leqslant p \dim \mathrm{Ker}\ u$$

et $$\sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{\left[\dim \mathrm{Ker}\ u^{k+1} - \dim \mathrm{Ker}\ u^k\right]}_{\geqslant 1} = \dim \mathrm{Ker}\ u^p - \dim \mathrm{Ker}\ u = n - \dim \mathrm{Ker}\ u \geqslant p - 1$$

On conclut $$\boxed{\frac{n}{p} \leqslant \dim \mathrm{Ker}\ u \leqslant n - p + 1}$$

Remarque : On peut aussi formuler ce résultat comme un encadrement liant rang d'un endomorphisme nilpotent avec son ordre de nilpotence

$$p - 1 \leqslant \mathrm{rg}\,(u) \leqslant n\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Exercice 8 (***)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie tel que $f^3 = 0$.

1. Montrer $$\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(f^2) \leqslant \dim \mathrm{E}$$
2. Montrer $$2\,\mathrm{rg}\,(f^2) \leqslant \mathrm{rg}\,(f)$$

Corrigé : 1. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim \mathrm{E} = \mathrm{rg}\,(f) + \dim \mathrm{Ker}\ f$$

Or $$f^3 = 0 \iff f \circ f^2 = 0 \iff \mathrm{Im}\ f^2 \subset \mathrm{Ker}\ f$$

d'où $$\mathrm{rg}\,(f^2) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\ f$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(f^2) \leqslant \dim \mathrm{E}}$$

2. On a $$\mathrm{Im}\ f_{|_{\mathrm{Im}\ f}} = \{f(x), x \in \mathrm{Im}\ f\} = \{f^2(t), t \in \mathrm{E}\} = \mathrm{Im}\ f^2$$

et $$\mathrm{Ker}\ f_{|_{\mathrm{Im}\ f}} = \{x \in \mathrm{Im}\ \mid f(x) = 0\} = \mathrm{Ker}\ f \cap \mathrm{Im}\ f$$

D'après le théorème du rang appliqué à $f_{|\mathrm{Im}\, f}$, on a

$$\dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rg}\,(f_{|\mathrm{Im}\, f}) + \dim \mathrm{Ker}\, f_{|\mathrm{Im}\, f} = \mathrm{rg}\,(f^2) + \dim \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$$

et $$\mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$$

D'où $$\boxed{2\,\mathrm{rg}\,(f^2) \leqslant \mathrm{rg}\,(f)}$$

Exercice 9 (***)

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$.

1. On suppose $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad |a_{i,i}| > \mathrm{R}_i \quad \text{avec} \quad \mathrm{R}_i = \sum_{j \in [\![1\,;\,n]\!] \smallsetminus \{i\}} |a_{i,j}|$

   Montrer que $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
2. On considère $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $a_{i,i} = 3$ et $a_{i,j} = 1$ si $|i-j| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ si $|i-j| \geqslant 2$ pour $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$. Montrer que la matrice A est inversible.

Corrigé : 1. Une telle matrice est dite à *diagonale dominante stricte*. Supposons A non inversible. On dispose de $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \smallsetminus \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$ telle que $\mathrm{AX} = 0$. On note $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec les $x_i \in \mathbb{K}$.

Comme $\mathrm{X} \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$, on dispose de $i_0 \in [\![1\,;\,n]\!]$ tel que

$$|x_{i_0}| = \operatorname*{Max}_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} |x_i| > 0$$

Si ce maximum était nul, toutes les coordonnées de X seraient nulles ce qui contredirait l'hypothèse X non nulle. Par ailleurs, la i_0-ème ligne de AX est nulle donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j = 0 &\iff a_{i_0,i_0} x_{i_0} + \sum_{j \in [\![1\,;\,n]\!] \smallsetminus \{i_0\}} a_{i_0,j} x_j = 0 \\ &\iff |a_{i_0,i_0}| = \left| \sum_{j \in [\![1\,;\,n]\!] \smallsetminus \{i_0\}} a_{i_0,j} \frac{x_j}{|x_{i_0}|} \right| \end{aligned}$$

la division par $|x_{i_0}|$ étant possible puisque le nombre est non nul. Par inégalité triangulaire et choix de $|x_{i_0}| = \operatorname*{Max}_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} |x_i|$, il vient alors

$$|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j \in [\![1\,;\,n]\!] \smallsetminus \{i_0\}} |a_{i_0,j}| \underbrace{\left| \frac{x_j}{x_{i_0}} \right|}_{\leqslant 1} \leqslant \sum_{j \in [\![1\,;\,n]\!] \smallsetminus \{i_0\}} |a_{i_0,j}|$$

ce qui contredit l'hypothèse de départ faite sur A. Ainsi

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \qquad \mathrm{AX} = 0 \Longrightarrow \mathrm{X} = 0$$

d'où $$\boxed{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})}$$

Remarque : Ce résultat est souvent référencé sous l'intitulé *lemme d'Hadamard.*

2. La matrice proposée est à diagonale dominante stricte. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})}$$

Exercice 10 (***)

Déterminer les sev stables pour l'endomorphisme dérivation de $\mathbb{K}[X]$.

Corrigé : Les sev $\{0\}$, $\mathbb{K}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{K}[X]$ sont clairement stables par D. Montrons que ce sont les seuls. Soit F un sev de $\mathbb{K}[X]$ stable par D avec $F \neq \{0\}$. Supposons que $\{\deg P, P \in F \setminus \{0\}\}$ est majoré et notons n son maximum. Ainsi, on a $F \subset \mathbb{K}_n[X]$. Soit $P \in F$ tel que $n = \deg P$. On a $P^{(k)} \in F$ pour tout $k \in [\![0\,;\, n]\!]$ et $(P^{(k)})_{k\in[\![0\,;\, n]\!]}$ est échelonnée en degré, formée de polynômes non nuls, donc libre. Par conséquent, on a $n+1 \leqslant \dim F \leqslant \dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$ d'où $F = \mathbb{K}_n[X]$. Si $\{\deg P, P \in F \setminus \{0\}\}$ n'est pas majoré, alors pour pour tout n entier, il existe $P \in F$ tel que $\deg P = p \geqslant n$ et par suite $F \supset \mathbb{K}_p[X] \supset \mathbb{K}_n[X]$ pour tout n entier d'où $F = \mathbb{K}[X]$. Ainsi

$$\boxed{\text{Les sev stable par dérivation sont exactement les } \mathbb{K}_n[X] \text{ avec } n \text{ entier, } \{0\} \text{ et } \mathbb{K}[X].}$$

Exercice 11 (***)

Soient f, g des projecteurs non nuls de E un $\mathbb{K}$-ev tels que

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \mid f \circ g - g \circ f = \lambda f + \mu g$$

On suppose $(\lambda, \mu) \notin \{0, 1\}^2$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f \circ g \subset \operatorname{Im} g$ et que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$.
2. Établir que $\lambda + \mu = 0$ puis $f \circ g = f$.
3. En déduire $f = g$.

Corrigé : 1. En composant par g à droite la relation puis en isolant $f \circ g$, on obtient

$$f \circ g = \frac{1}{1-\lambda}\,[g \circ f \circ g + \mu g]$$

D'où
$$\boxed{\operatorname{Im} f \circ g \subset \operatorname{Im} g}$$

Puis
$$f = \frac{1}{\lambda}\,[f \circ g - g \circ f - \mu g]$$

Et par conséquent
$$\boxed{\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g}$$

2. On a
$$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker}(\mathrm{id} - g) \Longrightarrow g \circ f = f$$

Puis
$$f \circ g - g \circ f = \lambda f + \mu g \iff f \circ g - f = \lambda f + \mu g$$

En composant par f à droite, on obtient

$$f \circ g \circ f - f = \lambda f + \mu g \circ f \iff f \circ f - f = 0 = (\lambda + \mu) f$$

D'où
$$\boxed{\lambda + \mu = 0}$$

Puis
$$f \circ g - \mu g = (1 + \lambda) f = (1 - \mu) f$$

et en composant par f à gauche, il vient

$$(1 - \mu) f \circ g = (1 - \mu) f$$

Soit
$$\boxed{f \circ g = f}$$

3. Avec les résultats précédents, on a $f \circ g - g \circ f = f - f = 0 = \lambda(f - g)$ d'où

$$\boxed{f = g}$$