Corrigé du devoir en temps libre n°5

Problème I

1. On a φ à valeurs dans E et φ linéaire par bilinéarité du produit et de la trace d'où

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

2. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi(\mathrm{M}) = \lambda\mathrm{M}$. On a

$$\varphi(\mathrm{M}) = \lambda\mathrm{M} \iff \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{A} = (\lambda + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}))\mathrm{M}$$

Si $\lambda = -\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$, on trouve $\qquad \varphi(\mathrm{M}) = \lambda\mathrm{M} \iff \mathrm{M} \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr}$

ce qui prouve $-\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) \in \mathrm{Sp}\,(\varphi)$ et $\mathrm{E}_{-\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})}(\varphi) = \mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr}$. Si $\lambda \neq -\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$, on a $\mathrm{M} \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{A})$ autrement dit $\mathrm{E}_\lambda \subset \mathrm{Vect}\,(\mathrm{A})$. On trouve $\varphi(\mathrm{A}) = 0$ d'où $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{A}) \subset \mathrm{E}_0(\varphi)$ et comme $0 \neq -\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$, on a $\mathrm{E}_0(\varphi) \subset \mathrm{Vect}\,(\mathrm{A})$. Ainsi

$$\mathrm{Sp}\,(\varphi) = \{0, -\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_0(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{A}) \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_{-\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})}(\varphi) = \mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr}$$

On a $\dim \mathrm{E}_0(\varphi) + \dim \mathrm{E}_{-\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})}(\varphi) = \dim \mathrm{E}$ ce qui prouve la diagonalisabilité de φ et dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à $\mathrm{E} = \mathrm{E}_0(\varphi) \oplus \mathrm{E}_{-\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})}(\varphi)$, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\varphi = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & -\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\mathrm{I}_{n^2-1} \end{array}\right)$. On conclut

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable et } \det\varphi = 0,\ \mathrm{Tr}\ \varphi = -(n^2-1)\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}).}$$

Problème II

1. On a $u^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ et $u^n = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$. On dispose donc de $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$. Soit $\mathscr{B} = (x_0, \ldots, u^{n-1}(x_0))$ et $(\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(x_0) = 0_\mathrm{E}$. Supposons les α_i non tous nuls. On pose

$$\ell = \ \mathrm{Min}\ \{k \in [\![\, 0\,;\, n-1 \,]\!] \mid \alpha_k \neq 0\}$$

Ainsi
$$0_\mathrm{E} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(x_0) = \sum_{i=\ell}^{n-1} \alpha_i u^i(x_0)$$

et en appliquant $u^{n-1-\ell}$ de chaque côté de l'égalité (ce qui a du sens puisque $n-1-\ell \geqslant 0$), il vient

$$u^{n-1-\ell}\left(\sum_{i=\ell}^{n-1} \alpha_i u^i(x_0)\right) = \alpha_\ell u^{n-1}(x_0) = 0_\mathrm{E}$$

Il s'ensuit $\alpha_\ell = 0$ ce qui contredit l'existence de ℓ. Par conséquent, la famille $\mathscr{B}$ est libre, de cardinal égal à $\dim \mathrm{E}$ ce qui prouve qu'il s'agit d'une base de E et on conclut

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } u \text{ est cyclique.}}$$

2. Supposons u cyclique. On dispose de $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $\mathscr{B} = (x_0, \ldots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Par conséquent, il existe $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \in \mathbb{K}^n$ tel que $u^n(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(x_0))$ et la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ a donc la forme attendue. Réciproquement, supposons qu'il existe $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de u

telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ est compagne. On a $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$, $\ldots$ $u(e_{n-1}) = e_n$ d'où $e_i = u^i(e_1)$ pour tout $i \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ par récurrence immédiate. On conclut

$$\boxed{u \text{ est cyclique } \iff \text{ il existe } \mathscr{B} \text{ base de E telle que } \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u \text{ est compagne}}$$

3.(a) soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $\mathscr{B} = (x_0, \ldots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Soit $(\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i = 0$. On évalue en x_0 d'où

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(x_0) = 0_{\mathrm{E}}$$

et par liberté de la famille $\mathscr{B}$, il s'ensuit $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in [\![0\,;\, n-1]\!]$. On conclut

$$\boxed{\text{La famille } (\mathrm{id}\,, u, \ldots, u^{n-1}) \text{ est libre.}}$$

3.(b) Notons $d = \deg \pi_u$. La famille $(u^k)_{k \in [\![0\,;\, d-1]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$. La famille $(u^k)_{k \in [\![0\,;\, n-1]\!]}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[u]$ d'où $\dim \mathbb{K}[u] \geqslant n$ et par conséquent $d \geqslant n$. Or, on sait $d \leqslant n$ puisque π_u divise χ_u d'où $d = n$ et comme π_u et χ_u sont unitaires, on conclut

$$\boxed{\pi_u = \chi_u}$$

Problème III

(i) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et u, v dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ diagonalisables avec $u \circ v = v \circ u$. On a $\mathrm{E} = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$, comme u et v commutent, alors $\mathrm{E}_\lambda(u)$ est stable par v. Notons v_λ l'endomorphisme induit par v sur $\mathrm{E}_\lambda(u)$. On a v_λ diagonalisable car induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable. Ainsi, on peut trouver $\mathscr{B}_\lambda$ une base de $\mathrm{E}_\lambda(u)$ qui soit base de diagonalisation de v_λ. Mais cette base est également constituée de vecteurs propres de u (associés à λ). Ainsi, en concaténant $\mathscr{B} = \biguplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathscr{B}_\lambda$, on obtient une base de diagonalisation simultanée de u et v et on conclut

$$\boxed{\text{Il existe une base de diagonalisation pour } u \text{ et } v.}$$

(ii) Le *centre* Z(E) est défini par

$$\mathrm{Z(E)} = \{\mathrm{M} \in \mathrm{E} \mid \forall \mathrm{C} \in \mathrm{E} \quad \mathrm{MC} = \mathrm{CM}\}$$

Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{Z(E)}$. En particulier, pour $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$, on a

$$\mathrm{ME}_{i,j} = \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} m_{k,\ell} \underbrace{\mathrm{E}_{k,\ell}\mathrm{E}_{i,j}}_{=\delta_{ell,i}\mathrm{E}_{k,j}} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i}\mathrm{E}_{k,j} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_{i,j}\mathrm{M} = \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} m_{k,\ell} \underbrace{\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell}}_{=\delta_{j,k}\mathrm{E}_{i,\ell}} = \sum_{\ell=1}^{n} m_{j,\ell}\mathrm{E}_{i,\ell}$$

Ainsi
$$\begin{aligned} \mathrm{ME}_{i,j} = \mathrm{E}_{i,j}\mathrm{M} &\iff \sum_{k=1}^{n} m_{k,i}\mathrm{E}_{k,j} = \sum_{\ell=1}^{n} m_{j,\ell}\mathrm{E}_{i,\ell} \\ &\iff m_{i,i} = m_{j,j} \quad \text{et} \quad \text{pour} \quad k \neq \ell \qquad m_{k,\ell} = 0 \end{aligned}$$

On conclut
$$\boxed{\mathrm{Z(E)} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n)}$$

1. L'application Φ est clairement à valeurs dans E et linéaire par linéarité de la somme et bilinéarité du produit matriciel d'où

$$\boxed{\Phi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

2.(a) Pour $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$, on a

$$\Phi(\mathrm{M}_{i,j}) = \mathrm{AM}_{i,j} + \mathrm{M}_{i,j}\mathrm{B} = \mathrm{PDE}_{i,j}\mathrm{Q}^{-1} + \mathrm{PE}_{i,j}\Delta\mathrm{Q}^{-1}$$

et
$$\mathrm{DE}_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell \underbrace{\mathrm{E}_{\ell,\ell}\mathrm{E}_{i,j}}_{\delta_{\ell,i}\mathrm{E}_{\ell,j}} = \lambda_i \mathrm{E}_{i,j} \qquad \mathrm{E}_{i,j}\Delta = \sum_{\ell=1}^{n} \mu_\ell \underbrace{\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{\ell,\ell}}_{\delta_{j,\ell}\mathrm{E}_{i,\ell}} = \mu_j \mathrm{E}_{i,j}$$

Ainsi
$$\boxed{\Phi(\mathrm{M}_{i,j}) = \lambda_i \mathrm{PE}_{i,j}\mathrm{Q}^{-1} + \mu_j \mathrm{PE}_{i,j}\mathrm{Q}^{-1} = (\lambda_i + \mu_j)\mathrm{M}_{i,j}}$$

2.(b) La famille $(\mathrm{M}_{i,j})_{(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2}$ est donc une famille de vecteurs propres de φ et on vérifie sans difficulté qu'elle est libre ce qui prouve qu'il s'agit d'une base de diagonalisation de Φ. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{A}, \mathrm{B} \text{ diagonalisables} \Longrightarrow \Phi \text{ diagonalisable}}$$

3.(a) On a χ_A scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ d'où A trigonalisable dans E. Ainsi, la matrice A est semblable à $\mathrm{diag}(\lambda \mathrm{I}_{m_\lambda})_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} + \mathrm{diag}(\mathrm{T}_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})}$ avec les T_λ triangulaires supérieures strictes. Un produit par blocs montre la commutation des deux matrices et en procèdant de même pour la matrice B, on conclut

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{On dispose de matrices } \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2 \text{ diagonalisables et } \mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2 \text{ nilpotentes telles} \\ \text{que } \mathrm{A} = \mathrm{D}_1 + \mathrm{N}_1,\ \mathrm{B} = \mathrm{D}_2 + \mathrm{N}_2 \text{ avec } \mathrm{D}_1\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_1\mathrm{D}_1 \text{ et } \mathrm{D}_2\mathrm{N}_2 = \mathrm{N}_2\mathrm{D}_2.\end{array}}$$

3.(b) Les applications Φ_d et Φ_n sont clairement des endomorphismes de E et le sens direct précédemment établi garantit la diagonalisabilité de Φ_d. Sans difficulté, on montre que l'endomorphisme Φ_n est somme des deux endomorphismes $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{N}_1\mathrm{M}$ et $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{MN}_2$ nilpotents et qui commutent d'où la nilpotence de Φ_n. Puis, pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$, on a

$$\begin{aligned}\Phi_d \circ \Phi_n(\mathrm{M}) &= \mathrm{D}_1\mathrm{N}_1\mathrm{M} + \mathrm{N}_1\mathrm{MD}_2 + \mathrm{D}_1\mathrm{MN}_2 + \mathrm{MN}_2\mathrm{D}_2 \\ &= \mathrm{N}_1\mathrm{D}_1\mathrm{M} + \mathrm{N}_1\mathrm{MD}_2 + \mathrm{D}_1\mathrm{MN}_2 + \mathrm{MD}_2\mathrm{N}_2 = \Phi_n \circ \Phi_d(\mathrm{M})\end{aligned}$$

ce qui prouve la commutation de Φ_d et Φ_n. Ainsi

$$\boxed{\Phi_d \text{ est diagonalisable, } \Phi_n \text{ nilpotent avec } \Phi_d \circ \Phi_n = \Phi_n \circ \Phi_d}$$

3.(c) Il en résulte que les endomorphismes $\Phi = \Phi_d + \Phi_n$ et Φ_d sont diagonalisables et commutent. Ils admettent donc une base commune de diagonalisation ce qui prouve la diagonalisabilité de $\Phi - \Phi_d$. Par conséquent

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \Phi_n \text{ est diagonalisable}}$$

3.(d) Ainsi, L'endomorphisme Φ_n est diagonalisable et nilpotent d'où $\Phi_n = 0$. En particulier, on a $\Phi_n(\mathrm{I}_n) = 0$ d'où

$$\boxed{\mathrm{N}_1 = -\mathrm{N}_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_1 \in \mathrm{Z}(\mathrm{E})}$$

3.(e) Ainsi, la matrice N_1 est nilpotente et dans $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n)$ d'où $\mathrm{N}_1 = 0$ et par suite $\mathrm{N}_2 = 0$. On conclut

$$\boxed{\Phi \text{ diagonalisable} \Longrightarrow \mathrm{A}, \mathrm{B} \text{ diagonalisables}}$$