Devoir en temps libre n°6

Problème I

Soit $\mathrm{E} = \{f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. On pose

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}_1(f) = \|f\|_\infty \qquad \mathrm{N}_2(f) = \|f + f'\|_\infty \qquad \mathrm{N}_3(f) = \|f'\|_\infty$$

1. Justifier que N_1, N_2, N_3 sont des normes.
2. Comparer ces normes.

Problème II

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$, on définit le *rayon spectral* de A noté $\rho(\mathrm{A})$ par

$$\rho(\mathrm{A}) = \operatorname*{Max}_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} |\lambda|$$

Une norme $\|\cdot\|$ sur E est dite *sous-multiplicative* si elle vérifie

$$\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$$

On pose
$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}(\mathrm{A}) = \operatorname*{Max}_{i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

1. Montrer que N définit une norme sous-multiplicative sur E.
2. Soit $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{A} \mapsto \|\mathrm{A}\| = \mathrm{N}(\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ})$ est une norme sous-multiplicative.
3. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ telle que $\rho(\mathrm{A}) < 1$.
   (a) Justifier qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ triangulaire supérieure.
   (b) Soit $\delta > 0$, $\Delta = \mathrm{diag}(1, \delta, \ldots, \delta^{n-1})$ et $\widehat{\mathrm{T}} = \Delta^{-1}\mathrm{T}\Delta$. Montrer que $\widehat{\mathrm{T}}$ est triangulaire supérieure et qu'on peut choisir $\delta > 0$ tel que $\mathrm{N}(\widehat{\mathrm{T}}) < 1$.
   (c) Avec ce choix de δ, on pose $\mathrm{Q} = \mathrm{P}\Delta$ et on munit E de la norme $\mathrm{M} \mapsto \|\mathrm{M}\| = \mathrm{N}(\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{MQ})$. Montrer que $\|\mathrm{A}\| < 1$ et conclure que $\mathrm{A}^p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$.

Problème III

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ avec $\mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n$, on munit E de $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|\mathrm{P}\|_\infty = \operatorname*{Max}_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$.
On dit qu'une suite $(\mathrm{P}_n)_n$ est *de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall (p,n) \in \mathbb{N}^2 \quad n \geqslant \mathrm{N} \implies \|\mathrm{P}_{n+p} - \mathrm{P}_n\| \leqslant \varepsilon$$

On pose
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{X}^k}{k}$$

1. Montrer que $(\mathrm{P}_n)_n$ est de Cauchy.
2. Montrer que $(\mathrm{P}_n)_n$ ne converge pas.