ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°19

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\sigma : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, (u_n)_n \mapsto (u_{n+1})_n$. Déterminer les valeurs propres de σ.

Corrigé : Pour $\lambda \neq 0$, on trouve $\operatorname{Ker}(\sigma - \lambda\,\mathrm{id}) = \operatorname{Vect}(\lambda^n)_n$ et $\operatorname{Ker}\sigma = \operatorname{Vect}(\delta_{0,n})_n$. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble des valeurs propres de } \sigma \text{ est } \mathbb{K} \text{ tout entier.}}$$

Exercice 2 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$ et φ définie sur E par $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} + \operatorname{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$ pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Déterminer les éléments propres de φ.

Corrigé : L'application φ est à valeurs dans E et linéaire par linéarité de la trace et du produit d'où $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Soit λ réel et $\mathrm{M} \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$. On a

$$\varphi(\mathrm{M}) = \lambda\mathrm{M} \iff (\lambda - 1)\mathrm{M} = \operatorname{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$$

Par suite
$$\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} \iff \mathrm{M} \in \operatorname{Ker}\operatorname{Tr}$$

ce qui prouve que $1 \in \operatorname{Sp}(\varphi)$ et $\mathrm{E}_1(\varphi) = \operatorname{Ker}\operatorname{Tr}$, hyperplan de E. Pour $\lambda \neq 1$, on a $\mathrm{M} = \dfrac{\operatorname{Tr}(\mathrm{M})}{\lambda - 1}\mathrm{I}_n \in \operatorname{Vect}(\mathrm{I}_n)$ puis $\varphi(\mathrm{I}_n) = (n+1)\mathrm{I}_n$. On en déduit que $n+1 \in \operatorname{Sp}(\varphi)$ avec $\operatorname{Vect}(\mathrm{I}_n) \subset \mathrm{E}_{n+1}(\varphi)$ et on sait aussi $\mathrm{E}_{n+1}(\varphi) \subset \operatorname{Vect}(\mathrm{I}_n)$ car $n+1 \neq 1$ d'où l'égalité $\mathrm{E}_{n+1}(\varphi) = \operatorname{Vect}(\mathrm{I}_n)$ et on conclut

$$\boxed{\operatorname{Sp}(\varphi) = \{1, n+1\} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_1(\varphi) = \operatorname{Ker}\operatorname{Tr} \qquad \mathrm{E}_{n+1}(\varphi) = \operatorname{Vect}(\mathrm{I}_n)}$$

Remarque : On a $\dim \mathrm{E}_1(\varphi) + \dim \mathrm{E}_{n+1}(\varphi) = \dim \mathrm{E}$ ce qui prouve le caractère diagonalisable de φ.

Variante : Après le calcul de $\varphi(\mathrm{I}_n) = (n+1)\mathrm{I}_n$, on peut aussi écrire

$$\dim \mathrm{E} \geqslant \dim \mathrm{E}_1(\varphi) \oplus \mathrm{E}_{n+1}(\varphi) = \dim \mathrm{E}_1(\varphi) + \dim \mathrm{E}_{n+1}(\varphi) \geqslant n^2 - 1 + 1 = \dim \mathrm{E}$$

ce qui prouve l'égalité des dimensions.

Exercice 3 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et f, g dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.
2. Si E est de dimension finie, établir
$$\operatorname{Sp}(f \circ g) = \operatorname{Sp}(g \circ f)$$
3. On choisit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $f : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{XP}$ et $g : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}'$. Montrer que f, g sont dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis déterminer si zéro est valeur propre de $f \circ g$ et $g \circ f$. Qu'en déduit-on ?

Corrigé : 1. Soit λ valeur propre non nulle de $f \circ g$ et $x \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$ tel que $f \circ g(x) = \lambda x$. En particulier, on a $g(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$ puisque $f(g(x)) = \lambda x \neq 0_{\mathrm{E}}$. Par suite

$$g \circ f(g(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x) \quad \text{avec} \quad g(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$$

ce qui prouve $\qquad \lambda$ valeur propre non nulle de $g \circ f$

Par symétrie des rôles, on conclut

$$\boxed{\text{Les endomorphismes } f \circ g \text{ et } g \circ f \text{ ont les mêmes valeurs propres non nulles.}}$$

2. On rappelle que pour $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E de dimension finie, on a

$$u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \det u \neq 0$$

On sait $\det(f \circ g) = \det(g \circ f)$ d'où

$$0 \in \mathrm{Sp}\,(f \circ g) \iff 0 \in \mathrm{Sp}\,(g \circ f)$$

Ainsi $\qquad \boxed{\mathrm{Sp}\,(f \circ g) = \mathrm{Sp}\,(g \circ f)}$

3. Les applications f et g sont clairement à valeurs dans E et sont linéaires, respectivement par linéarité du produit à gauche et de la dérivation. On a

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_0[\mathrm{X}] \qquad f \circ g(\mathrm{P}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \in \mathrm{Sp}\,(f \circ g)$$

Puis, soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$. On a $\deg \mathrm{P} \geqslant 0$ puis $\deg g \circ f(\mathrm{P}) \geqslant 0$ d'où $g \circ f(\mathrm{P}) \neq 0$ ce qui prouve que $0 \notin \mathrm{Sp}\,(g \circ f)$. On conclut

$$\boxed{\text{En dimension quelconque, on n'a pas en général } \mathrm{Sp}\,(f \circ g) = \mathrm{Sp}\,(g \circ f).}$$

Exercice 4 (**)

Pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\|\mathrm{M}\| = \underset{i \in [\![1\,;\,n]\!]}{\mathrm{Sup}} \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|$. Montrer

$$\forall \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A}) \subset [\,-\|\mathrm{A}\|\,;\,\|\mathrm{A}\|\,]$$

Corrigé : Soit X colonne réelle non nulle telle que $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$ avec λ réel. Soit $i_0 \in [\![1\,;\,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \underset{k \in [\![1\,;\,n]\!]}{\mathrm{Max}} |x_k|$. La ligne i_0 de l'égalité $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$ donne

$$\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j$$

Par inégalité triangulaire et comme $|x_{i_0}| > 0$ puisque X est non nulle, il vient

$$|\lambda| = \frac{1}{|x_{i_0}|} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leqslant \|\mathrm{A}\|$$

On conclut $\qquad \boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A}) \subset [\,-\|\mathrm{A}\|\,;\,\|\mathrm{A}\|\,]}$

Exercice 5 (**)

Soit n entier et $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, on pose

$$\varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{X}(\mathrm{X} - 1)\mathrm{P}' - n\mathrm{XP}$$

1. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Établir que la famille $\mathscr{B} = (\mathrm{X}^k(\mathrm{X} - 1)^{n-k})_{k \in [\![0\,;\,n]\!]}$ est une base de E et préciser $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\varphi$.

Corrigé : 1. L'application φ est linéaire par linéarité de la dérivation et du produit. On a $\varphi(1) = -n\mathrm{X}$ puis

$$\forall k \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \varphi(\mathrm{X}^k) = (k-n)\mathrm{X}^{k+1} - k\mathrm{X}^k \in \mathrm{E}$$

Par caractérisation d'une application linéaire sur une base, on conclut

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

2. La question fournit une famille de polynômes. On peut raisonnablement espérer qu'ils jouent un rôle particulier pour l'endomorphisme φ. On note

$$\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \mathrm{P}_k = \mathrm{X}^k(\mathrm{X}-1)^{n-k}$$

Puis, pour $k \in [\![0\,;\, n]\!]$, on trouve

$$\begin{aligned}\varphi(\mathrm{P}_k) &= \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\left[k\mathrm{X}^{k-1}(\mathrm{X}-1)^{n-k} + (n-k)\mathrm{X}^k(\mathrm{X}-1)^{n-k-1}\right] - n\mathrm{X}\times\mathrm{X}^k(\mathrm{X}-1)^{n-k}\\ &= \mathrm{X}^k(\mathrm{X}-1)^{n-k}\left[k(\mathrm{X}-1) + (n-k)\mathrm{X} - n\mathrm{X}\right] = -k\mathrm{P}_k\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{P}_k \neq 0$ (puisque $\deg \mathrm{P}_k = n$ par exemple), il s'ensuit que les P_k sont des vecteurs propres de E. Ainsi, on dispose d'une famille $\mathscr{B} = (\mathrm{P}_k)_{k\in[\![0\,;\, n]\!]}$ de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. Par suite, la famille $\mathscr{B}$ est libre avec $\operatorname{Card} \mathscr{B} = \dim \mathrm{E}$ et forme donc une base de diagonalisation de φ. Comme les valeurs propres sont distinctes, les sous-espaces propres sont des droites vectorielles et on a donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(\varphi) = \{-k, k \in [\![0\,;\, n]\!]\} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \mathrm{E}_{-k}(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{P}_k)}$$

Exercice 6 (*)

Soit n entier. On considère D l'endomorphisme de dérivation de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. Déterminer π_D.

Corrigé : On a clairement $\mathrm{D}^{n+1} = 0$ d'où $\pi_\mathrm{D} | \mathrm{X}^{n+1}$. Ainsi, il existe $p \in [\![1\,;\, n+1]\!]$ tel que $\pi_\mathrm{D} = \mathrm{X}^p$. En particulier, on a

$$\pi_\mathrm{D}(\mathrm{D})(\mathrm{X}^n) = \mathrm{D}^p(\mathrm{X}^n) = p!\binom{n}{p}\mathrm{X}^{n-p}$$

avec $\binom{n}{n+1} = 0$ par convention. Si $p < n+1$, alors on a $\deg \pi_\mathrm{D}(\mathrm{D})(\mathrm{X}^n) \geqslant 0$ ce qui est absurde et par conséquent

$$\boxed{\pi_\mathrm{D} = \mathrm{X}^{n+1}}$$

Exercice 7 (*)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Comparer χ_A avec $\chi_{\mathrm{A}^\mathrm{T}}$, π_A avec $\pi_{\mathrm{A}^\mathrm{T}}$.

Corrigé : On a

$$\chi_\mathrm{A} = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{A}) = \det\left(\mathrm{XI}_n - \mathrm{A}\right)^\mathrm{T} = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{A}^\mathrm{T}) = \chi_{\mathrm{A}^\mathrm{T}}$$

Notons $\pi_\mathrm{A} = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k\mathrm{X}^k$. On a $\pi_\mathrm{A}(\mathrm{A}) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k\mathrm{A}^k = 0$. En transposant cette égalité, il vient $\pi_\mathrm{A}(\mathrm{A}^\mathrm{T}) = 0$ d'où $\pi_{\mathrm{A}^\mathrm{T}} | \pi_\mathrm{A}$ et l'autre sens vient par symétrie des rôles. Les polynômes étant unitaires et associés, on conclut

$$\boxed{\chi_\mathrm{A} = \chi_{\mathrm{A}^\mathrm{T}} \quad \text{et} \quad \pi_\mathrm{A} = \pi_{\mathrm{A}^\mathrm{T}}}$$

Exercice 8 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, P, Q dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ avec $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} = 1$ et $(\mathrm{PQ})(f) = 0$. Montrer

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\ \mathrm{P}(f) \oplus \mathrm{Im}\ \mathrm{P}(f)$$

Corrigé : Avec le lemme des noyaux, on a $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\ \mathrm{P}(f) \oplus \mathrm{Ker}\ \mathrm{Q}(f)$. Montrons $\mathrm{Ker}\ \mathrm{Q}(f) = \mathrm{Im}\ \mathrm{P}(f)$. On a $\mathrm{Q}(f) \circ \mathrm{P}(f) = 0$ d'où $\mathrm{Im}\ \mathrm{P}(f) \subset \mathrm{Ker}\ \mathrm{P}(f)$. Avec la relation de Bezout, il existe A, B dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{AP} + \mathrm{BQ} = 1$. Pour $x \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{Q}(f)$, on a

$$x = \mathrm{P}(f) \circ \mathrm{A}(f)(x) + \mathrm{B}(f) \circ \mathrm{Q}(f)(x) = \mathrm{P}(f) \circ \mathrm{A}(f)(x) \in \mathrm{Im}\ \mathrm{P}(f)$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\ \mathrm{P}(f) \oplus \mathrm{Im}\ \mathrm{P}(f)}$

Exercice 9 (*)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{rg}\ \mathrm{A} = 1$. Déterminer χ_A.

Corrigé : On a $\dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{A} = \dim \mathrm{E}_0(\mathrm{A}) = n-1$ d'où $\mathrm{X}^{n-1} | \chi_\mathrm{A}$. Ainsi, il existe $\alpha \in \mathrm{K}$ tel que $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X}-\alpha) = \mathrm{X}^n - \alpha \mathrm{X}^{n-1}$. Or, on sait que

$$\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^n - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\mathrm{X}^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(\mathrm{A})$$

Par identification, on conclut

$$\boxed{\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}))}$$

Variante : Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A. En complétant une base de $\mathrm{Ker}\ u$ en base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^n$, on trouve la matrice par blocs $\mathrm{mat}_\mathscr{B} u = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{C} \\ \hline 0 & \alpha \end{array}\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\mathrm{C} \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$. En particulier, on a $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}\,(u) = \alpha$ et on trouve

$$\chi_\mathrm{A} = \chi_u = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X}-\alpha) = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}))$$

On peut aussi partir d'une base de $\mathrm{Im}\ u$ que l'on complète en base de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 10 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{rg}\ \mathrm{A} = 1$. Déterminer π_A.

Corrigé : On prouve successivement qu'il existe X, Y des colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulles telles que $\mathrm{A} = \mathrm{XY}^\top$ puis $\mathrm{A}^2 = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\mathrm{A}$. On en déduit $\pi_\mathrm{A} | \mathrm{X}(\mathrm{X} - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}))$. Si $\deg \pi_\mathrm{A} = 1$, alors A serait une matrice d'homothétie de rang 1. On exclut le cas $n = 1$ qui est trivial et on en déduit que $\mathrm{rg}\ \mathrm{A} \in \{0, n\}$ ce qui est impossible. On conclut

$$\boxed{\text{Pour } \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ avec } n \geqslant 2 \text{ et } \mathrm{rg}\ \mathrm{A} = 1, \text{ on a } \pi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^2 - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\mathrm{X}.}$$

Exercice 11 (**)

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) = \varnothing \iff \chi_\mathrm{A}(\mathrm{B}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

Corrigé : D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, on peut écrire

$$\chi_\mathrm{A} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} (\mathrm{X} - \lambda)^{m_\lambda(\mathrm{A})}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Puis }\ \chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\iff \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} (\mathrm{B}-\lambda \mathrm{I}_n)^{m_\lambda(\mathrm{A})} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\\
&\iff \det\left(\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} (\mathrm{B}-\lambda \mathrm{I}_n)^{m_\lambda(\mathrm{A})}\right) = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} [(-1)^n\chi_{\mathrm{B}}(\lambda)]^{m_\lambda(\mathrm{A})} \neq 0\\
\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\iff \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \qquad \lambda \notin \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})
\end{aligned}
$$

D'où $$\boxed{\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) = \varnothing \iff \chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$$

Exercice 12 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$. Montrer que $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Corrigé : On a $\det u \neq 0$ puis

$$
\begin{aligned}
\chi_u(u) = 0 &\iff u^n - (\mathrm{Tr}\ u)u^{n-1} + \ldots + (-1)^n(\det u)\,\mathrm{id} = 0\\
&\iff (-1)^{n-1}(\det u)^{-1}\,[u^n - (\mathrm{Tr}\ u)u^{n-1} + \ldots] = \mathrm{id}\\
\chi_u(u) = 0 &\iff u \circ (-1)^{n-1}(\det u)^{-1}\,[u^{n-1} - (\mathrm{Tr}\ u)u^{n-2} + \ldots] = \mathrm{id}
\end{aligned}
$$

On conclut $$\boxed{u^{-1} \in \mathbb{K}[u]}$$

Variante : Soit $\Phi : \mathbb{K}[u] \to \mathbb{K}[u], v \mapsto v \circ u$. On a $\Phi \in \mathscr{L}(\mathbb{K}[u])$ et $\mathrm{Ker}\ \Phi = \{0\}$ car u inversible. L'application Φ est un endomorphisme injectif en dimension finie. C'est donc un automorphisme et par suite, il existe $v \in \mathbb{K}[u]$ tel que $\Phi(v) = \mathrm{id}$ ce qui prouve le résultat attendu. Notant $\mathscr{B} = (u^k)_{0\leqslant k\leqslant d}$ avec $d = \deg \pi_u$, on peut remarquer que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\Phi$ est la matrice compagne du polynôme minimal de π_u.

Exercice 13 (**)

Calculer χ_{A} avec $\mathrm{A} = \big(a_{i,j}\big) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Corrigé : Avec successivement $\mathrm{C}_1 \leftarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{C}_i$ et $\mathrm{C}_k \leftarrow \mathrm{C}_k + \mathrm{C}_1$ pour $k \in [\![\, 2\,;\,n\,]\!]$, on obtient

$$\chi_{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -1 & \ldots & -1\\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & -1\\ -1 & \ldots & -1 & \mathrm{X}\end{vmatrix} = (\mathrm{X}-n+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & \ldots & -1\\ 1 & \mathrm{X} & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & -1\\ 1 & \ldots & -1 & \mathrm{X}\end{vmatrix} = (\mathrm{X}-n+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0\\ 1 & \mathrm{X}+1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 1 & \ldots & -1 & \mathrm{X}+1\end{vmatrix}$$

Ainsi $$\boxed{\chi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X}-n+1)(\mathrm{X}+1)^{n-1}}$$

Variante : Notant $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(u+\mathrm{id})$ de rang 1 donc semblable à une matrice $\left(\begin{array}{c|c} \alpha & \mathrm{L}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$ avec $\alpha = \mathrm{Tr}\,(u+\mathrm{id}) = n$ d'où $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}u$ semblable à $\left(\begin{array}{c|c} n-1 & \mathrm{L}\\ \hline 0 & -\mathrm{I}_{n-1}\end{array}\right)$. On retrouve le résultat précédent.

Exercice 14 (**)

Calculer χ_{A} avec $\mathrm{A} = \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=1 \text{ ou } j=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Corrigé : On a
$$\chi_{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \mathrm{X}-1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & \mathrm{X} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & \mathrm{X} \end{vmatrix}$$

Avec l'opération $\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \dfrac{1}{\mathrm{X}}\sum\limits_{i=2}^{n}\mathrm{L}_i$, il vient

$$\chi_{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \mathrm{X}-1-\dfrac{n-1}{\mathrm{X}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & \mathrm{X} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & \mathrm{X} \end{vmatrix} = \left(\mathrm{X}-1-\frac{n-1}{\mathrm{X}}\right)\mathrm{X}^{n-1}$$

Ainsi
$$\boxed{\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^{n-2}(\mathrm{X}^2-\mathrm{X}-n+1)}$$

Variantes : 1. Notant $\mathrm{P}_n = \chi_{\mathrm{A}}$, on obtient en développant sur la dernière colonne, on trouve

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{XP}_{n-1} + (-1)^n \begin{vmatrix} -1 & \mathrm{X} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \mathrm{X} \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}_{n-1} = \mathrm{XP}_{n-1} - \mathrm{X}^{n-2}$$

en développant le déterminant d'ordre $n-1$ sur la dernière ligne. On peut ensuite calculer P_n pour de petites valeurs de n afin de conjecturer une forme générale puis l'établir par récurrence ou considérer la fraction rationnelle $\mathrm{R}_n = \dfrac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{X}^n}$ puisqu'on a

$$\mathrm{R}_n = \frac{\mathrm{P}_{n-1}}{\mathrm{X}^{n-1}} - \frac{1}{\mathrm{X}^2} = \mathrm{R}_{n-1} - \frac{1}{\mathrm{X}^2}$$

ce qui prouve que la suite $(\mathrm{R}_n)_n$ est arithmétique et on peut donc déterminer son terme général aisément.

2. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A. On pose $\varepsilon_1 = e_1$ et $\varepsilon_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\operatorname{Im} u$. On a

$$\mathrm{AX} = 0 \iff x_1 = 0, \sum_{i=2}^{n} x_i = 0 \iff \mathrm{X} = \sum_{i=3}^{n} -x_i(e_3 - e_i)$$

On pose $\varepsilon_i = e_3 - e_i$ pour $i \in [\![3\,;\,n]\!]$ et $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Avec l'opération $\mathrm{C}_2 \leftarrow \sum_{i=2}^{n} \mathrm{C}_i$ sur la matrice

$$\mathrm{P} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} \mathscr{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on obtient une matrice constituée de n colonnes échelonnées non nulles ce qui prouve que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ pour laquelle on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{B} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $$\chi_{\mathrm{A}} = \chi_u = \chi_{\mathrm{B}} \mathrm{X}^{n-2} = (\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - n + 1)\mathrm{X}^{n-1}$$