ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°20

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (**)

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et u, v dans $\mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v admettent un vecteur propre commun.

Corrigé : Soit λ valeur propre de u (existe car χ_u scindé). Les endomorphismes $u - \lambda\,\mathrm{id}$ et v commutent d'où $E_\lambda(u)$ stable par v et notant v_λ l'endomorphisme induit, celui-ci admet une valeur propre et donc un vecteur propre associé (χ_{v_λ} est scindé). Un tel vecteur est vecteur propre de v_λ donc de v et dans $E_\lambda(u)$ donc vecteur propre de u. Ainsi

$$\boxed{\text{Deux endomorphismes d'un } \mathbb{C}\text{-ev qui commutent ont un vecteur propre commun.}}$$

Exercice 2 (**)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit les matrices par blocs

$$U = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_n & A \\ \hline B & I_n \end{array}\right) \quad \text{et} \quad V = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -B & \lambda I_n \end{array}\right)$$

1. À l'aide des matrices U et V, établir $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
2. Montrer que $\chi_{A\bar{A}} \in \mathbb{R}[X]$.

Corrigé : 1. Le produit par bloc donne

$$UV = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_n - AB & \lambda A \\ \hline 0 & \lambda I_n \end{array}\right) \quad \text{et} \quad VU \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_n & A \\ \hline 0 & \lambda I_n - BA \end{array}\right)$$

Comme on a $\det(UV) = \det(VU)$, il s'ensuit $\lambda^n \chi_{AB}(\lambda) = \lambda^n \chi_{BA}(\lambda^n)$. Le polynôme $X^n \chi_{AB} - X^n \chi_{BA}$ admet donc une infinité de racines et on conclut

$$\boxed{\chi_{AB} = \chi_{BA}}$$

2. On a
$$\overline{\chi_{A\bar{A}}} = \overline{\det(XI_n - A\bar{A})} = \det(XI_n - \bar{A}A) = \chi_{\bar{A}A}$$

Or, on sait $\chi_{A\bar{A}} = \chi_{\bar{A}A}$ d'après le résultat précédent d'où l'égalité $\chi_{A\bar{A}} = \overline{\chi_{A\bar{A}}}$ et on conclut

$$\boxed{\chi_{A\bar{A}} \in \mathbb{R}[X]}$$

Exercice 3 (**)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que χ_A divise π_A^n.

Corrigé : On se place dans $\mathbb{C}$. On a $\chi_A = \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)} (X - \lambda)^{m_\lambda(A)}$ et $\pi_A = \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$. Comme $\pi_A | \chi_A$ et que les racines de π_A sont exactement les valeurs propres de A, on a

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(A) \qquad 1 \leqslant \alpha_\lambda \leqslant m_\lambda(A) \leqslant n \leqslant n\alpha_\lambda$$

d'où
$$\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} (\mathrm{X}-\lambda)^{m_\lambda(\mathrm{A})} \Big| \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} (\mathrm{X}-\lambda)^{n\alpha_\lambda} = \pi_{\mathrm{A}}^n$$

Dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, il en résulte que $\chi_{\mathrm{A}} | \pi_{\mathrm{A}}^n$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a l'existence de $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que $\pi_{\mathrm{A}}^n = \mathrm{Q}\chi_{\mathrm{A}}$. Par conjugaison, comme π_{A} et χ_{A} sont dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, il vient $\pi_{\mathrm{A}}^n = \bar{\mathrm{Q}}\chi_{\mathrm{A}}$ d'où $(\mathrm{Q}-\bar{\mathrm{Q}})\chi_{\mathrm{A}} = 0$ puis $\mathrm{Q} = \bar{\mathrm{Q}}$ par intégrité. La divisibilité a donc lieu dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on conclut

$$\boxed{\chi_{\mathrm{A}} | \pi_{\mathrm{A}}^n}$$

Exercice 4 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale avec $\mathrm{A} = \mathrm{diag}(\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_r)$ et $\mathrm{A}_i \in \mathscr{M}_{m_i}(\mathbb{K})$ pour $i \in [\![1\,;\, r]\!]$. Déterminer χ_{A} en fonction des χ_{A_i} et π_{A} en fonction des π_{A_i}.

Corrigé : Avec un calcul par blocs, il vient
$$\chi_{\mathrm{A}} = \det \mathrm{diag}(\mathrm{XI}_{m_1} - \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{XI}_{m_r} - \mathrm{A}_r) = \prod_{i=1}^r \det \mathrm{diag}(\mathrm{XI}_{m_i} - \mathrm{A}_i)$$

Puis, pour $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on trouve, à nouveau par un calcul par blocs
$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{diag}(\mathrm{P}(\mathrm{A}_1), \ldots, \mathrm{P}(\mathrm{A}_r))$$

Ainsi
$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0 \iff \forall i \in [\![1\,;\, r]\!] \qquad \mathrm{P}(\mathrm{A}_i) = 0$$

autrement dit
$$\mathrm{P} \in \pi_{\mathrm{A}}\,\mathbb{K}[\mathrm{X}] \iff \mathrm{P} \in \bigcap_{i=1}^r \pi_{\mathrm{A}_i}\,\mathbb{K}[\mathrm{X}] = (\pi_{\mathrm{A}_1} \vee \ldots \vee \pi_{\mathrm{A}_r})\mathbb{K}[\mathrm{X}]$$

Par conséquent, les polynômes π_{A} et $\pi_{\mathrm{A}_1} \vee \ldots \vee \pi_{\mathrm{A}_r}$ sont associés et unitaires donc égaux. On conclut

$$\boxed{\chi_{\mathrm{A}} = \prod_{i=1}^r \chi_{\mathrm{A}_i} \quad \text{et} \quad \pi_{\mathrm{A}} = \pi_{\mathrm{A}_1} \vee \ldots \vee \pi_{\mathrm{A}_r}}$$

Exercice 5 (**)

Soit u un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$-ev admettant un polynôme minimal π_u et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

1. Montrer $\qquad \mathrm{P}(u) \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{P} \wedge \pi_u = 1$
2. Montrer que si $\mathrm{P}(u) \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$, alors $\mathrm{P}(u)^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Corrigé : 1. Si $\mathrm{P} \wedge \pi_u = 1$, d'après le théorème de Bézout, il existe $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^2$ tel que $\mathrm{AP} + \mathrm{B}\pi_u = 1$ d'où
$$\mathrm{id} = \mathrm{A}(u) \circ \mathrm{P}(u) + \mathrm{B}(u) \circ \pi_u(u) = \mathrm{A}(u) \circ \mathrm{P}(u) = \mathrm{P}(u) \circ \mathrm{A}(u)$$

ce qui prouve le sens indirect. Supposons $\mathrm{P} \wedge \pi_u \neq 1$. Notons $\mathrm{D} = \mathrm{P} \wedge \pi_u$. Comme D divise P et π_u, on a $\mathrm{P} = \mathrm{QD}$ et $\pi_u = \mathrm{RD}$ avec Q et R dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Comme π_u est non nul, on a R et D non nuls et D non constant puisque D est unitaire avec $\mathrm{D} \neq 1$. Il vient
$$\mathrm{R}(u) \circ \mathrm{P}(u) = \mathrm{R}(u) \circ \mathrm{D}(u) \circ \mathrm{Q}(u) = \pi_u(u) \circ \mathrm{Q}(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

Si $\mathrm{P}(u) \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$, en composant par $\mathrm{P}(u)^{-1}$ à droite, on obtient $\mathrm{R}(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ avec $\deg \mathrm{R} < \deg \pi_u$ ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\mathrm{P}(u) \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{P} \wedge \pi_u = 1}$$

Variante : Pour le sens direct, on peut aussi considérer $\mathrm{P} = \lambda \prod_{i=1}^{r} \mathrm{P}_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs irréductibles avec les α_i entiers non nuls. Supposons qu'il existe $i \in [\![1\,;r]\!]$ tel que $\pi_u = \mathrm{P}_i\mathrm{Q}$ avec $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Il s'ensuit que π_u divise PQ d'où $\mathrm{P}(u) \circ \mathrm{Q}(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ et en composant par $\mathrm{P}(u)^{-1}$ à gauche, on en déduit $\mathrm{Q}(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ avec $\mathrm{Q} \neq 0$ et $\deg \mathrm{Q} < \deg \pi_u$ (car P_i non constant) ce qui est absurde. On en déduit que pour tout $i \in [\![1\,;r]\!]$, le polynôme irréductible P_i ne divise pas π_u autrement dit $\pi_u \wedge \mathrm{P}_i = 1$ et il s'ensuit $\mathrm{P} \wedge \pi_u = 1$.

2. D'après ce qui précède, on a vu que si $\mathrm{P}(u)$ est inversible, alors il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{A}(u) \circ \mathrm{P}(u) = \mathrm{id}$, autrement dit $\mathrm{A}(u) = \mathrm{P}(u)^{-1}$ et donc

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{P}(u) \in \mathrm{GL(E)}, \text{ alors } \mathrm{P}(u)^{-1} \in \mathbb{K}[u].}$$

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, f et g dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que

$$f \circ g - g \circ f = f$$

Montrer que f est nilpotent et que f et g admettent au moins un vecteur propre commun.

Corrigé : Par récurrence, on montre

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad f^k \circ g - g \circ f^k = k f^k$$

Posons $$\mathscr{P}(k) : \quad f^k \circ g - g \circ f^k = k f^k$$

L'initialisation $\mathscr{P}(0)$ est immédiate. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie pour k entier fixé. On a

$$\begin{aligned} f^{k+1} \circ g - g \circ f^{k+1} &= f \circ (f^k \circ g) - g \circ f^{k+1} = f \circ (g \circ f^k + k f^k) - g \circ f^{k+1} \\ &= (f \circ g) \circ f^k + k f^{k+1} - g \circ f^{k+1} = (g \circ f + f) \circ f^k + k f^{k+1} - g \circ f^{k+1} \\ f^{k+1} \circ g - g \circ f^{k+1} &= (k+1) f^{k+1} \end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. On pose

$$\forall h \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \qquad \Phi(h) = h \circ g - g \circ h$$

On a $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(\mathrm{E}))$ et $\Phi(f^k) = k f^k$ pour tout k entier. Si f n'est pas nilpotent, l'endomorphisme Φ aurait un nombre infini de valeurs propres ce qui est absurde. Il existe donc p entier non nul tel que $f^p = 0$. Puis, pour $x \in \operatorname{Ker} f$, on a $f(g(x)) = g(f(x)) + f(x) = 0_{\mathrm{E}}$ d'où $g(x) \in \operatorname{Ker} f$ ce qui prouve la stabilité de $\operatorname{Ker} f$ par g. L'endomorphisme induit $g_{\operatorname{Ker} f}$ est trigonalisable puisqu'on est dans un $\mathbb{C}$-ev. Un vecteur propre de $g_{\operatorname{Ker} f}$ est vecteur propre de g et également vecteur propre de f. On conclut

$$\boxed{\text{On a } f \text{ nilpotent et } f \text{ et } g \text{ admettent au moins un vecteur propre commun.}}$$

Variante : On montré $f^k \circ g - g \circ f^k = k f^k$ pour tout k entier. Par combinaison, linéaire, on en déduit

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{P}(f) \circ g - g \circ \mathrm{P}(f) = (\mathrm{XP}')(f)$$

On prend $\mathrm{P} = \pi_f$. On en déduit $\mathrm{X}\pi_f'$ est annulateur de f d'où $\pi_f | \mathrm{X}\pi_f'$. Or, les polynômes ont même degré avec π_f unitaire d'où $\mathrm{X}\pi_f' = d\pi_f$ notant $d = \deg \pi_f$. On résout l'équation différentielle $x' - \dfrac{d}{t}x = 0$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et on trouve la droite $\operatorname{Vect}(t \mapsto t^d)$ comme espace de solutions. Ainsi, on a $\pi_f = \mathrm{X}^d$ ce qui prouve que f est nilpotent.

Exercice 7 (***)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On suppose qu'il existe $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\operatorname{rg} \mathrm{X} = r \geqslant 1$ tel que $\mathrm{AX} = \mathrm{XB}$. Montrer que χ_{A} et χ_{B} ont un facteur commun de degré r.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que, pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, l'équation $\mathrm{AX} - \mathrm{XB} = \mathrm{M}$ d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ admette une unique solution.

Corrigé : 1. Comme $\operatorname{rg} \mathrm{X} = r$, il existe P et Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{X} = \mathrm{PJ}_r\mathrm{Q}$ d'où

$$\mathrm{A}'\mathrm{J}_r = \mathrm{J}_r\mathrm{B}' \quad \text{avec} \quad \mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}'_1 & \mathrm{A}'_2 \\ \hline \mathrm{A}'_3 & \mathrm{A}'_4 \end{array}\right) \qquad \mathrm{B}' = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{BQ} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{B}'_1 & \mathrm{B}'_2 \\ \hline \mathrm{B}'_3 & \mathrm{B}'_4 \end{array}\right)$$

Ainsi
$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}'_1 & 0 \\ \hline \mathrm{A}'_3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{B}'_1 & \mathrm{B}'_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

d'où
$$\mathrm{A}'_1 = \mathrm{B}'_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{A}'_3 = 0 \qquad \mathrm{B}'_2 = 0$$

Par conséquent
$$\mathrm{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}'_1 & \mathrm{A}'_2 \\ \hline 0 & \mathrm{A}'_4 \end{array}\right) \qquad \mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{B}'_1 & 0 \\ \hline \mathrm{B}'_3 & \mathrm{B}'_4 \end{array}\right)$$

Ainsi
$$\chi_{\mathrm{A}'_1} | \chi_{\mathrm{A}'} \qquad \chi_{\mathrm{B}'_1} | \chi_{\mathrm{B}'} \quad \text{et} \quad \chi_{\mathrm{A}'_1} = \chi_{\mathrm{B}'_1}$$

Comme on a $\chi_{\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{A}'}$ et $\chi_{\mathrm{B}} = \chi_{\mathrm{B}'}$, on conclut

$$\boxed{\text{Les polynômes } \chi_{\mathrm{A}} \text{ et } \chi_{\mathrm{B}} \text{ ont un facteur commun de degré } r.}$$

2. On choisit $\mathrm{A} = 0$ et $\mathrm{B} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathrm{E}_{k,k+1}$ d'où $\chi_{\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{B}} = \mathrm{X}^n$. On a $\mathrm{XB} = 0$ d'où $\operatorname{Im} \mathrm{B} \subset \operatorname{Ker} \mathrm{X}$ et $\operatorname{rg} \mathrm{B} = n - 1$ d'où $\operatorname{rg} \mathrm{X} \leqslant 1$. Pour $\operatorname{rg} \mathrm{X} \geqslant 2$, on conclut

$$\boxed{\text{La réciproque est fausse.}}$$

3. On pose
$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \qquad \Phi(\mathrm{X}) = \mathrm{AX} - \mathrm{XB}$$

On a clairement $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))$ et on cherche donc une condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit bijective, c'est-à-dire Φ injective puisqu'il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie. Si $\operatorname{Ker} \Phi \neq \{0\}$, alors il existe $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ telle que $\mathrm{AX} = \mathrm{XB}$. Par conséquent, les polynômes χ_{A} et χ_{B} ont un facteur commun de degré $\operatorname{rg}(\mathrm{X}) \geqslant 1$ et donc une racine commune (ce facteur est scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$). Il en résulte que $\operatorname{Sp}(\mathrm{A}) \cap \operatorname{Sp}(\mathrm{B}) \neq \varnothing$. Ainsi, la condition $\operatorname{Sp}(\mathrm{A}) \cap \operatorname{Sp}(\mathrm{B}) = \varnothing$ est nécessaire pour Φ bijective. Supposons $\operatorname{Sp}(\mathrm{A}) \cap \operatorname{Sp}(\mathrm{B}) \neq \varnothing$. En remarquant $\operatorname{Sp}(\mathrm{B}) = \operatorname{Sp}(\mathrm{B}^\top)$, on prend U et V matrices colonnes non nulles telles que $\mathrm{AU} = \lambda\mathrm{U}$ et $\mathrm{B}^\top\mathrm{V} = \lambda\mathrm{V}$ pour $\lambda \in \operatorname{Sp}(\mathrm{A}) \cap \operatorname{Sp}(\mathrm{B})$. Alors, posant $\mathrm{X} = \mathrm{UV}^\top$, on a bien $\mathrm{X} \neq 0$ et on trouve $\Phi(\mathrm{X}) = 0$. On conclut

$$\boxed{\Phi \in \mathrm{GL}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})) \iff \operatorname{Sp}(\mathrm{A}) \cap \operatorname{Sp}(\mathrm{B}) = \varnothing}$$

Exercice 8 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A admet une valeur propre complexe non réelle, alors il existe un plan vectoriel stable par A.

Corrigé : Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$. On note $\mathrm{X}_1 = \mathrm{Re}\,\mathrm{X}$, $\mathrm{X}_2 = \mathrm{Im}\,\mathrm{X}$, $\lambda_1 = \mathrm{Re}\,\lambda$ et $\lambda_2 = \mathrm{Im}\,\lambda$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X} &\iff \mathrm{AX}_1 + \mathrm{i}\mathrm{AX}_2 = (\lambda_1\mathrm{X}_1 - \lambda_2\mathrm{X}_2) + \mathrm{i}(\lambda_2\mathrm{X}_1 + \lambda_1\mathrm{X}_2)\\ &\iff \begin{cases}\mathrm{AX}_1 = \lambda_1\mathrm{X}_1 - \lambda_2\mathrm{X}_2\\ \mathrm{AX}_2 = \lambda_2\mathrm{X}_1 + \lambda_1\mathrm{X}_2\end{cases}\end{aligned}$$

Justifions enfin que $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit α, β des réels tels que $\alpha\mathrm{X}_1 + \beta\mathrm{X}_2 = 0$. On a

$$\alpha\mathrm{X}_1 + \beta\mathrm{X}_2 = \alpha\frac{\mathrm{X} + \bar{\mathrm{X}}}{2} + \beta\frac{\mathrm{X} - \bar{\mathrm{X}}}{2\mathrm{i}} = 0 \iff \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2\mathrm{i}}\right)\mathrm{X} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2\mathrm{i}}\right)\bar{\mathrm{X}} = 0$$

Or, la famille $(\mathrm{X}, \bar{\mathrm{X}})$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ puisqu'on a $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$ et passant au conjugué $\mathrm{A}\bar{\mathrm{X}} = \bar{\lambda}\bar{\mathrm{X}}$ avec $\lambda \neq \bar{\lambda}$ et il s'agit donc d'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. On en déduit

$$\begin{cases}\alpha - \mathrm{i}\beta = 0\\ \alpha + \mathrm{i}\beta = 0\end{cases}$$

et il s'agit d'un système de Cramer d'où $\alpha = \beta = 0$. Ainsi, la famille $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ est libre et le plan vectoriel $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ est donc stable par A d'où

$$\boxed{\text{Il existe un plan vectoriel stable par A.}}$$

Exercice 9 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$.

1. On suppose $\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad |a_{i,i}| > \mathrm{R}_i \quad \text{avec} \quad \mathrm{R}_i = \sum_{j \in [\![1\,;\, n]\!] \setminus \{i\}} |a_{i,j}|$

   Montrer que $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

2. Pour $(a, \mathrm{R}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$, on note $\mathrm{D}_f(a, \mathrm{R}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leqslant \mathrm{R}\}$. Montrer

   $$\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{D}_f(a_{i,i}, \mathrm{R}_i)$$

   Les ensembles $\mathrm{D}_f(a_{i,i}, \mathrm{R}_i)$ sont appelés *disques de Gerschgorin.*

Corrigé : 1. Une telle matrice est dite à *diagonale dominante stricte*. Supposons que $\mathrm{A} \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, autrement dit on dispose de $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\right\}$ telle que $\mathrm{AX} = 0$. On note $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec les $x_i \in \mathbb{K}$. Comme $\mathrm{X} \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$, alors on dispose de $i_0 \in [\![1\,;\, n]\!]$ tel que

$$|x_{i_0}| = \underset{i \in [\![1\,;\, n]\!]}{\mathrm{Max}}\, |x_i| > 0$$

Si ce maximum était nul, toutes les coordonnées de X seraient nulles ce qui contredirait l'hypothèse X non nulle. Par ailleurs, la i_0-ème ligne de AX est nulle donc

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j = 0 &\iff a_{i_0,i_0}x_{i_0} + \sum_{j \in [\![1\,;\, n]\!] \setminus \{i_0\}} a_{i_0,j}x_j = 0\\ &\iff |a_{i_0,i_0}| = \left|\sum_{j \in [\![1\,;\, n]\!] \setminus \{i_0\}} a_{i_0,j}\frac{x_j}{|x_{i_0}|}\right|\end{aligned}$$

la division par $|x_{i_0}|$ étant possible puisque le nombre est non nul. Par inégalité triangulaire et choix de $|x_{i_0}| = \underset{i\in[\![1\,;\,n]\!]}{\mathrm{Max}} |x_i|$, il vient alors

$$|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j\in[\![1\,;\,n]\!]\smallsetminus\{i_0\}} |a_{i_0,j}| \underbrace{\left|\frac{x_j}{x_{i_0}}\right|}_{\leqslant 1} \leqslant \sum_{j\in[\![1\,;\,n]\!]\smallsetminus\{i_0\}} |a_{i_0,j}|$$

ce qui contredit l'hypothèse de départ faite sur A. Ainsi

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \mathrm{AX} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{X} = 0$$

d'où $$\boxed{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})}$$

Remarque : Ce résultat est souvent référencé sous l'intitulé *lemme d'Hadamard.*

2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$. Par suite $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ d'où la négation du caractère à diagonale dominante stricte, *i.e.*

$$\exists i \in [\![1\,;\,n]\!] \quad | \quad |a_{i,i} - \lambda| \leqslant \mathrm{R}_i$$

Autrement dit $$\boxed{\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{D}_f(a_{i,i}, \mathrm{R}_i)}$$

On a localisé le spectre dans les disques dits de *Gershgorin.*

Exercice 10 (***)

Soit $\mathrm{A} = \big(a_{i,j}\big) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} > 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$ et vérifiant $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1. Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$.
2. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})$, alors $|\lambda| \leqslant 1$.
3. Établir que si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) \cap \mathbb{U}$, alors $\lambda = 1$.

Corrigé : 1. Notons $\mathrm{U} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne constituée de 1. On a clairement $\mathrm{AU} = \mathrm{U}$ et $\mathrm{U} \neq 0$ d'où

$$\boxed{1 \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})}$$

2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{X} = \big(x_i\big)\, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \smallsetminus \big\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\big\}$ tel que $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$. On note $k_0 \in [\![1\,;\,n]\!]$ tel que $|x_{k_0}| = \underset{k\in[\![1\,;\,n]\!]}{\mathrm{Max}} |x_k|$. On a

$$\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X} \iff \forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = \lambda x_i$$

En particulier pour $i = k_0$, en utilisant le fait que $|x_{k_0}| \neq 0$, il vient

$$|\lambda| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j} \frac{x_j}{x_{k_0}}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j} \left|\frac{x_j}{x_{k_0}}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j}$$

Ainsi $$\boxed{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) \quad \Longrightarrow \quad |\lambda| \leqslant 1}$$

3. Si $|\lambda| = 1$, en reprenant l'encadrement établi à la question précédente, on a

$$|\lambda| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j} \frac{x_j}{x_{k_0}}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j} \left|\frac{x_j}{x_{k_0}}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j} = 1 = |\lambda|$$

Ainsi, l'inégalité triangulaire est une égalité et on dispose donc de θ réel tel que

$$\forall j \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad x_j = x_{k_0} \left|\frac{x_j}{x_{k_0}}\right| \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta} = |x_j|\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha = \theta + \arg x_{k_0}$$

En reprenant la k_0-ème ligne de l'égalité $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$, on obtient

$$\lambda\,|x_{k_0}|\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\alpha} = \sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j}\,|x_j|\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\alpha} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \frac{1}{|x_{k_0}|}\sum_{j=1}^{n} a_{k_0,j}\,|x_j| > 0$$

Par suite, on a $\lambda = |\lambda| = 1$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\,\mathbb{C}}(\mathrm{A}) \cap \mathbb{U} = \{1\}}$$