

Quelques propriétés des racines de P'_n

1 On applique le théorème de Rolle, $P_n(k) = P_n(k+1) = 0$ donc il existe $x_{n,k} \in]k, k+1[$ tel que $P'_n(x_{n,k}) = 0$. On trouve alors n racines, $x_{n,k}$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et P'_n est un polynôme de degré n donc on a toutes ses racines.

Conclusion : P'_n admet exactement une racine $x_{n,k}$ dans chacun des intervalles $]k, k+1[$, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

2 On a $P_n(X) = X^{n+1} - \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n k \right)}_{n(n+1)/2} X^n + Q_{n-1}(X)$ où Q_{n-1} est un polynôme de degré $n-1$

d'où $P'_n(X) = (n+1)X^n - \frac{n^2(n+1)}{2} X^{n-1} + Q'_{n-1}(X)$. On utilise alors les relations

entre coefficients et racines pour trouver $\sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k} = \frac{n^2}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k} = \frac{n^2}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n}{2}$.

3 En dérivant la relation $P_n(n-X) = (-1)^{n+1} P_n(X)$ on a $P'_n(n-X) = (-1)^n P'_n(X)$ ce qui donne $P'_n(n-x_{n,k}) = 0$. Or $n-x_{n,k} \in]n-k-1, n-k[$ et par unicité, vu la question **1**, on en déduit que $n-x_{n,k} = x_{n,n-k-1}$.

On a ainsi $x_{n,k} + x_{n,n-k-1} = n$.

4 Immédiat : on écrit $\alpha_{n,k} + \alpha_{n,n-k-1} = x_{n,k} - k + x_{n,n-k-1} - (n-k-1) = 1$.

5 Les racines de P'_n sont simples donc pour chaque $x_{n,k}$, P'_n change de signe. On obtient alors les tableaux de variation suivants :

Si n est pair

| | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----|-----------|-----|-----------|---------|------|------------|--------|--------------|--------|---------|---|---|
| x | $-\infty$ | 0 | x_{n_0} | 1 | x_{n_1} | \dots | $2k$ | $x_{n,2k}$ | $2k+1$ | $x_{n,2k+1}$ | $2k+2$ | \dots | | |
| $P'_n(x)$ | | + | + | 0 | - | - | 0 | | + | 0 | - | - | 0 | + |
| $P_n(x)$ | | | ↗ | ↘ | | | 0 | ↗ | ↘ | | 0 | | ↘ | ↗ |

Si n est impair

| | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----|-----------|-----|-----------|---------|------|------------|--------|--------------|--------|---------|---|---|
| x | $-\infty$ | 0 | x_{n_0} | 1 | x_{n_1} | \dots | $2k$ | $x_{n,2k}$ | $2k+1$ | $x_{n,2k+1}$ | $2k+2$ | \dots | | |
| $P'_n(x)$ | | - | - | 0 | + | + | 0 | | - | 0 | + | + | 0 | - |
| $P_n(x)$ | | ↘ | | 0 | ↗ | | 0 | ↘ | ↗ | | 0 | ↗ | ↘ | |

6 Le signe de $(-1)^{n-k} P'_n(x_{n,k})$ est constant et vaut 1 (distinguer les cas n pair et n impair).

7 On dérive la relation $P_n(X) = (X-n)P_{n-1}(X)$: $P'_n(X) = P_{n-1}(X) + (X-n)P'_{n-1}(X)$ et en appliquant ceci à $x_{n-1,k}$ on obtient $P'_n(x_{n-1,k}) = P_{n-1}(x_{n-1,k})$ et, en utilisant la question **6**, on en déduit que $(-1)^{n-k} P'_{n-1}(x_{n-1,k}) = (-1) \times (-1)^{n-1-k} P_{n-1}(x_{n-1,k}) < 0$ pour $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$.

8 Par convention, on pose $x_{n,-1} = -\infty$ et $x_{n,n} = +\infty$. On a ainsi

$$x_{n,k-1} < k < x_{n,k} < k+1 < x_{n,k+1} \text{ et } k < x_{n-1,k} < k+1 \text{ pour } k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket.$$

On a par conséquent $x_{n-1,k} \in]x_{n,k-1}, x_{n,k}[$ ou $x_{n-1,k} \in]x_{n,k}, x_{n,k+1}[$ mais, comme à la question **5** on avait $(-1)^{n-k} P'_n(x) < 0$ sur $]x_{n,k}, x_{n,k+1}[$ alors $x_{n-1,k}$ est dans ce dernier intervalle vu la question **7**.

Conclusion : on a $x_{n-1,k} < x_{n,k}$ pour $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$.

- 9 On dérive la relation $P_n(X) = XP_{n-1}(X-1) : P'_n(X) = P_{n-1}(X-1) + XP'_{n-1}(X-1)$ et, en substituant $1 + x_{n-1,k-1}$ à X , on trouve $P'_n(1 + x_{n-1,k-1}) = P_{n-1}(1 + x_{n-1,k-1})$. La question 6 nous donne alors $(-1)^{n-k} P'_n(1 + x_{n-1,k-1}) > 0$ pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
- 10 On procède par encadrement comme à la question 8.
- 11 On a donc, en rassemblant les résultats des questions 8 et 10 :

$$\underbrace{x_{n-1,k}}_{\alpha_{n-1,k+k}} > \underbrace{x_{n,k}}_{\alpha_{n,k+k}} > \underbrace{1 + x_{n-1,k-1}}_{1 + \alpha_{n-1,k-1+k-1}}$$

soit $\alpha_{n-1,k} > \alpha_{n,k} > \alpha_{n-1,k-1}$ donc $(\alpha_{n,k})_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ est croissante.

Un développement asymptotique

- 12 $h_x(t) \sim_0 t^{x-1}$ intégrable au voisinage de 0 ssi $x > 0$ et $t^2 h_x(t) \rightarrow 0$ en $+\infty$ donc $h_x(t)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.
Conclusion : $\mathcal{E} =]0, +\infty[$.
- 13 On a (par exemple) $\Gamma(x) \geq \int_1^2 t^{x-1} e^{-t} dt > 0$ car c'est l'intégrale d'une fonction continue (h_x) strictement positive.
- 14 On applique le théorème de Leibniz en posant $f(x, t) = h_x(t)$: si $x \in [a, b] \subset]0, +\infty[$ alors, pour $i \in \{1, 2\}$, on a
- $\frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) = (\ln t)^i t^{x-1} e^{-t}$ est continue séparément par rapport à x et par rapport à t sur $]0, +\infty[$,
 - $\left| \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) \right| \leq |\ln t|^i e^{-t} \max(t^{a-1}, t^{b-1}) = \varphi(t)$. $\varphi(t) \sim_0 |\ln t| e^{-t} t^{a-1}$ est intégrable au voisinage de 0 car $t^{1-a/2} \varphi(t) \rightarrow 0$ et $1 - a/2 > -1$, $t^2 \varphi(t) \rightarrow 0$ en $+\infty$ donc φ est aussi intégrable au voisinage de $+\infty$ donc φ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
- On peut donc conclure : Γ est de classe \mathcal{C}^2 sur tout segment de $]0, +\infty[$ donc sur $]0, +\infty[$.
- 15 C'est une simple application du théorème d'intégration par parties que l'on peut redémontrer ainsi :

soit $0 < \varepsilon < T$ alors, en dérivant t^x et en intégrant e^{-t} , on a

$$\int_{\varepsilon}^T t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_{\varepsilon}^T + x \int_{\varepsilon}^T t^{x-1} e^{-t} dt$$

or $T^x e^{-T} \rightarrow 0$ en $+\infty$ et $\varepsilon^x e^{-\varepsilon} \rightarrow 0$ en 0 et comme les fonctions intégrées sont intégrables sur $]0, +\infty[$ alors on peut prendre la limite quand $T \rightarrow +\infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$ pour obtenir finalement $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

- 16 Ψ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ (rapport de deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 , le dénominateur ne s'annulant pas) donc il suffit de prouver que $\Psi'(x) > 0$ pour $x \in]0, +\infty[$:

$$\Psi'(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2}{\Gamma(x)^2}.$$

On utilise alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1} e^{-t} dt \right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} |\ln t| t^{x-1} e^{-t} dt \right)^2 \leq \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt \times \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

en écrivant $|\ln t| t^{x-1} e^{-t} = |\ln t|^{1/2} t^{(x-1)/2} e^{-t/2} \times t^{(x-1)/2} e^{-t/2} = f(t)g(t)$. L'inégalité est stricte car le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz n'est réalisé que si les 2 fonctions f et g sont proportionnelles. Comme $f(t) = |\ln t|g(t)$, on peut affirmer que ce n'est pas le cas et donc on a bien $\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2 > 0$ ce qui permet de conclure.

17 Immédiat, en effet on a $\Psi(x+1) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma'(x) + x\Gamma'(x)}{x\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ et donc

$$\Psi(x+1) = \frac{1}{x} + \Psi(x).$$

18 On a

$$\phi(n+1) - \phi(n) = \underbrace{\Psi(n+1) - \Psi(n)}_{=1/n} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n} - \ln(1 + 1/n) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la série aux différences $\sum \phi(n+1) - \phi(n)$ converge.

19 Comme $\phi(n) = \sum_{k=1}^{n-1} [\phi(k+1) - \phi(k)] + \phi(1)$, on en déduit que la suite $(\phi(n))$ converge.

20 Comme Ψ est strictement croissante (cf. question **16**) alors $\Psi(n) \leq \Psi(x) \leq \Psi(n+1)$ pour $x \in [n, n+1]$ donc $\underbrace{\Psi(n) - \ln x}_{=-\phi(n) + \ln(\frac{n}{x})} \leq \phi(x) \leq \underbrace{\Psi(n+1) - \ln x}_{=-\phi(n+1) + \ln(\frac{n+1}{x})}$ par conséquent $\phi(x)$

admet une limite en $+\infty$ qui vaut aussi C .

21 C'est le théorème (maintenant hors programme) d'intégration des équivalents que l'on demande de redémontrer dans ce cas particulier :

soit $\varepsilon > 0$ alors il existe X tel que $t \geq X \Rightarrow |C - \phi(t)| \leq |C| \frac{\varepsilon}{2}$ on a donc, pour $x \geq X$,

$$\left| \int_1^x \phi(t) dt - Cx \right| \leq \underbrace{\left| \int_1^X \phi(t) dt - CX \right|}_{=A} + \underbrace{\int_X^x |\phi(t) - C| dt}_{\leq (x-X)|C|\varepsilon/2 \leq x|C|\varepsilon/2}.$$

Comme on a supposé que $C \neq 0$ alors $Cx \rightarrow \infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ donc $\frac{A}{Cx} \rightarrow 0$ quand

$x \rightarrow +\infty$. On choisit alors $X_1 \geq X$ tel que $\left| \frac{A}{Cx} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \geq X_1$ par conséquent

$$\left| \int_1^x \phi(t) dt - Cx \right| \leq \varepsilon |C|x \text{ ce qui signifie exactement } \int_1^x \phi(t) dt \underset{+\infty}{\sim} Cx.$$

22 On a

$$\begin{aligned} \int_1^n \phi(t) dt &= \int_1^n \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} dt - \int_1^n \ln t dt \\ &= \ln \Gamma(n) - n \ln n + n - 1 = \ln n! - (n+1) \ln n + n - 1 \end{aligned}$$

d'où, en utilisant la formule de Stirling,

$$\begin{aligned} &= \ln \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} (1 + o(1)) - (n+1) \ln n + n - 1 \\ &= n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n - (n+1) \ln n + n + O(1) = -\frac{1}{2} \ln n + O(1) \end{aligned}$$

Conclusion : $\int_1^n \phi(t) dt = o(n)$ ce qui est contradictoire avec le résultat de la question **21** donc $C = 0$.

23 La conclusion devient alors immédiate. En effet, par une récurrence simple, on a

$$\begin{aligned} \Psi(x+m+1) &= \sum_{j=0}^m \frac{1}{x+j} + \Psi(x) = \phi(x+m+1) - \ln(x+m+1) \\ &= -\ln m + \underbrace{\phi(x+m+1)}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\ln[(x+m+1)/m]}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

donc on a bien $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\sum_{j=0}^m \frac{1}{x+j} + \Psi(x) - \ln m \right] = 0$.

Comportement asymptotique des $\alpha_{n,k}$

24 La décomposition de la fraction rationnelle $\frac{P'_n}{P_n}$ donne $\frac{P'_n(x)}{P_n(x)} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{x-j}$. On prend alors $x = x_{n,k} = k + \alpha_{n,k}$ qui annule P'_n d'où

$$\begin{aligned} \frac{P'_n(x_{n,k})}{P_n(x_{n,k})} &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{\alpha_{n,k} + k - j} = \sum_{j=0}^k \frac{1}{\alpha_{n,k} + k - j} + \sum_{j=k+1}^n \frac{1}{\alpha_{n,k} + k - j} \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{1}{\alpha_{n,k} + i} - \sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{1}{(1 - \alpha_{n,k}) + i} = 0 \end{aligned}$$

en posant $i = k - j$ dans la première somme et $i = j - k - 1$ dans la deuxième.

25 On utilise les questions **23** et **24** mais il faut adapter la question **23** : on a

$$\sum_{j=0}^m \frac{1}{x+j} + \Psi(x) - \ln m = \phi(x+m+1) - \ln \frac{x+m+1}{m}$$

et on encadre chacune de ces quantités :

$$\underbrace{\Psi(m+1) - \ln(m+2)}_{=\phi(m+1) + \ln \frac{m+1}{m+2}} \leq \phi(x+m+1) = \Psi(x+m+1) - \ln(x+m+1) \leq \underbrace{\Psi(m+2) - \ln(m+1)}_{=\phi(m+2) + \ln \frac{m+2}{m+1}}$$

et $\left| \ln \frac{x+m+1}{m} \right| \leq \ln \frac{m+2}{m}$ ce qui permet de dire que la limite dans la question **23** est uniforme par rapport à $x \in]0, 1[$. Ensuite

$$\Psi(u_n) - \Psi(1-u_n) + \underbrace{\sum_{j=0}^{[nt]} \frac{1}{u_n+j} - \sum_{j=0}^{n-[nt]-1} \frac{1}{1-u_n+j}}_{=0} - \ln[nt] + \ln(n - [nt] - 1) \rightarrow 0$$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} [nt] = +\infty$. Or $\ln(n - [nt] - 1) - \ln[nt] = \ln \frac{1 - k_n - 1/n}{k_n}$ où $k_n = \frac{[nt]}{n} \rightarrow t$.

On en déduit alors la formule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\Psi(u_n) - \Psi(1-u_n) + \ln \left(\frac{1-t}{t} \right) \right] = 0$.

26 C'est là enfin que l'on utilise la fonction Arc cot et la formule des compléments.

Si on dérive logarithmiquement la formule des compléments, on obtient

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} = \Psi(x) - \Psi(1-x) = -\pi \cot(\pi x).$$

En reprenant la formule de la question précédente, on a

$$\Psi(u_n) - \Psi(1-u_n) = -\pi \cot(\pi u_n) = -\ln \frac{1-t}{t} + o(1)$$

soit $u_n = \frac{1}{\pi} \text{Arc cot} \left[\frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{1-t}{t} \right) + o(1) \right]$ donc (u_n) admet une limite $F(t)$ qui vaut

$$\frac{1}{\pi} \text{Arc cot} \left[\frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{1-t}{t} \right) \right].$$