ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°18

Exercice 1 (**)

Soit E $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $f,\, g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que $g \circ f = 0$ et $f + g \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$.

Montrer $$\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) = \dim \mathrm{E} \quad \text{et} \quad \mathrm{E} = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g$$

Indications : Comparer $\mathrm{Im}\,(f+g)$ à $\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$ et en déduire une minoration de $\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g)$. Traduire $g \circ f = 0$ en terme d'inclusion puis utiliser le théorème du rang pour conclure.

Exercice 2 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. Montrer qu'il existe une unique famille $(e_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})^n$ telle que
$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$
2. Justifier que $(e_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$ sans utiliser $\dim \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$.

Indications : 1. Observer que pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, la condition définit e_i^* sur une base de E.
2. Établir la liberté de $(e_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ puis pour $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$, montrer que celle-ci coïncide sur $\mathscr{B}$ avec le candidat naturel pour être la décomposition de f dans $(e_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Exercice 3 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une famille libre de formes linéaires sur E. On pose
$$\Phi\colon \begin{cases} \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x \longmapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \end{cases}$$

1. Montrer que l'application Φ est un isomorphisme.
2. En déduire l'existence d'une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ *antéduale* à $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, c'est-à-dire vérifiant
$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad \varphi_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j}$$

Indications : 1. Supposer Φ non surjective et utiliser dans ce cas le fait que $\mathrm{Im}\, \Phi$ est incluse dans un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.
2. Utiliser la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 4 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul, $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$. Résoudre en l'inconnue $\mathrm{X} \in \mathrm{E}$ l'équation
$$\mathrm{X} + \mathrm{X}^\top = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{X})\mathrm{A} \tag{L}$$

Indications : Distinguer le cas $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{X}) = 0$ puis $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{X}) \neq 0$. On pourra utiliser l'application $\mathrm{X} \mapsto \dfrac{1}{2}(\mathrm{X} + \mathrm{X}^\top)$ en remarquant qu'il s'agit d'un projecteur.

Exercice 5 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer qu'il existe $v \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ et p projecteur de E tel que $u = v \circ p$.

Indications : Considérer $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ avec $\mathscr{B}$ une base de E puis travailler sur une matrice simple équivalente à A.

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que u admet au moins deux sev stables.
2. On suppose u non nul et non injectif.
   (a) Montrer que u admet au moins trois sev stables.
   (b) Si $\dim \mathrm{E}$ est impaire, montrer que u admet au moins quatre sev stables.
   (c) Donner un exemple d'endomorphisme qui admet exactement trois sev stables.

Indications : 2.(a) Considérer $\mathrm{Ker}\, u$.
2.(b) Comparer $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$.
2.(c) S'inspirer de la configuration étudiée à la question 2.(b).

Exercice 7 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E. On pose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \Phi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$$

Montrer

$$\Phi \text{ surjective} \iff (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \text{ libre}$$

Indications : Pour le sens direct, choisir judicieusement des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Pour le sens indirect, procéder par contraposition et observer que si l'application Φ n'est pas surjective, alors $\mathrm{Im}\, \Phi$ est contenue dans un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 8 (****)

Soit n entier non nul et $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que si $\mathrm{rg}\ \mathrm{M} = 1$, alors $\mathrm{M}^2 = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{M}$.

   Dans ce qui suit, on suppose que M vérifie la relation $\mathrm{M}^2 = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{M}$.

2. Si $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) \neq 0$, montrer que $\mathrm{rg}\,(\mathrm{M}) = 1$. On pourra considérer $\mathrm{A} = \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{M}$ avec $\lambda = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})$.
3. Si $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 0$, décrire les classes de similitude de M.

Indications : 1. Établir que $\mathrm{M} = \mathrm{X}\mathrm{Y}^\top$ avec X et Y dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
2. Calculer A^2.
3. Avec une base bien choisie, établir que M est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ avec $2r \leqslant n$.