CH EM 1 - ELECTROSTATIQUE

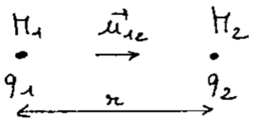
Poly à trous (et plusieurs feuilles annexes pour les calculs de champs) + Poly « Systèmes de coordonnées »

L'électrostatique est la branche de l'électromagnétisme qui décrit les interactions de charges fixes dans un référentiel donné.

I. Champ électrostatique – Loi de Coulomb

1) Champ créé par une charge ponctuelle – Loi de Coulomb

Loi de Coulomb :



Soient q_1 et q_2 deux charges ponctuelles au repos, placées dans le vide à la distance r l'une de l'autre. q_1 exerce sur q_2 la force : $\overrightarrow{\boldsymbol{F_{12}}} =$

Définition du champ créé par q_1 en M_2 : $\overrightarrow{\boldsymbol{E_1}}\,(\mathbf{M_2}) =$

En coordonnées sphériques de centre O,

le champ créé en un point M par une charge ponctuelle Q placée en O est *(CE)*

avec $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} =$

à connaître

CE : Citer quelques ordres de grandeur de valeurs de champs électrostatiques
Champ disruptif de l'air :

Champ exercé par le noyau sur l'électron dans l'atome d'hydrogène :

2) Analogie avec la loi de Newton

Loi de Newton :
Force d'attraction gravitationnelle crée par une masse m_1 en O sur une masse m_2 en M

A connaître **G =**

Ordre de grandeur : Montrer que dans l'atome d'hydrogène, la force gravitationnelle est négligeable devant la force électrostatique. On donne les masses $m_{électron}=9{,}1.10^{-31}$*kg et* $m_{proton}=1{,}7.10^{-27}$*kg*

3) Champ créé par un ensemble de charges ponctuelles

Par le principe de superposition,

$$\boxed{\vec{E}(M) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\vec{u}_i = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{A_iM}}{A_iM^3}}$$

schéma :

(CE) Exprimer le champ créé par une distribution discrète de charges

4) Distributions continues de charges

Lorsque le nombre de particules chargées est très élevé et sous réserve que la dimension caractéristique de la distribution considérée soit très supérieure à celle des particules individuelles, on adopte un modèle continu.

a) Distribution volumique :

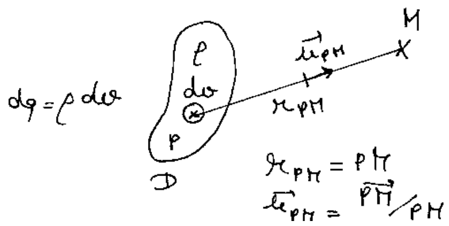
Définition de la **densité volumique de charges :**

Unité de ρ :

ρ(M) est une variable locale intensive (comme P et T), elle peut être reliée au nombre de particules par unité de volume n(M) et à la charge q d'une particule :

$\rho =$ si plusieurs espèces de charges, par exemple protons et électrons ou anions et cations

- Champ créé par une distribution volumique : on généralise la loi de Coulomb



Mais dans la majorité des cas (et dans le cadre du programme) ce ne sera pas par cette intégrale qu'on calculera le champ.

b) Distribution surfacique :

Si la distribution prend la forme d'une couche mince dont l'épaisseur h est très inférieure aux autres dimensions du problème, alors on adopte un modèle surfacique qui consiste à négliger l'épaisseur de la répartition et à considérer que toutes les charges sont disposées sur une surface.

- Définition de la densité surfacique de charges : $\sigma =$

Unité de σ :

- Lien entre densités volumiques et surfaciques : *schéma*

CE : Choisir un type de distribution continue adaptée à la situation modélisée.
Relier les densités de charges de deux types de distributions modélisant une même situation.

c) Distribution filiforme ou linéique :

Définition de la densité linéique de charges :

où dq est la charge portée par l'élément de longueur dl

II. Potentiel électrostatique

1) Forces de Coulomb et de Newton conservatives – Energie potentielle électrostatique

Travail d'une force lors d'un déplacement sur un chemin C de A en B :

Une force conservative est une force $\vec{F}$ dont le travail

Pour une telle force on définit une énergie potentielle E_p telle que

En électrostatique, travail élémentaire

L'énergie potentielle électrostatique (ou coulombienne) d'interaction d'une charge q en M avec une charge Q en O est

Les forces « newtoniennes » (en $\vec{u_r}/r^2$) sont conservatives.

L'énergie potentielle gravitationnelle (ou newtonienne) est :

2) Potentiel électrostatique

On définit le potentiel électrostatique créé par une distribution de charges :
si en un point M on place une charge test q c'est V(M) =

Relation générale entre énergie potentielle électrostatique et potentiel électrostatique :
Le potentiel électrostatique créé en M par une charge ponctuelle Q placée en O est V(M) =

Principe de superposition : Le potentiel créé par une distribution de charges ponctuelles est la somme des potentiels définis pour chacune V(M) =

(CE) Exprimer le potentiel créé par une distribution discrète de charges.

Exercice : vitesse d'une particule à la sortie d'une cavité accélératrice (CE de Sup)
Un électron est émis en O avec une vitesse initiale négligeable, par une électrode portée à une température élevée. Il est ensuite soumis à un champ électrostatique dont le potentiel est choisi nul au niveau de l'électrode.

1) Exprimer l'énergie mécanique de l'électron au cours de son mouvement.
2) Par un théorème énergétique, trouver la vitesse de l'électron en sortie S de la cavité accélératrice, si la tension entre les points O et S est égale à U.

3) Circulation du champ

Le travail de la force électrostatique agissant sur une particule de charge q se déplaçant entre A et B s'écrit :

W_{AB} =

La circulation du champ électrostatique, le long d'une courbe orientée est égale à la diminution du potentiel électrostatique *(CE) Déterminer une différence de potentiel par circulation du champ électrostatique dans des cas simples*

Circulation élémentaire :

4) Gradient

Equation locale vérifiée par le champ électrostatique et son potentiel :

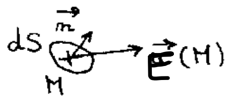
avec l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes $\vec{grad}(V) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{array} \right.$

(CE) Relier le champ électrostatique au potentiel. Citer l'expression de l'opérateur gradient en coordonnées cartésiennes. Déterminer un champ électrostatique à partir du potentiel, l'expression de l'opérateur gradient étant fournie dans le cas des coordonnées sphériques et cylindriques.

III. Théorème de Gauss

1) Flux du champ électrique

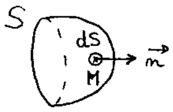
Flux à travers une surface élémentaire orientée :



On oriente dS par

Flux élémentaire de $\vec{E}$ à travers dS :

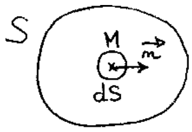
Flux à travers une surface orientée :



$\Phi =$

2 signes possibles suivant l'orientation de S

Flux à travers une surface fermée :



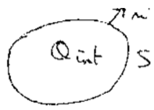
On choisit obligatoirement la normale sortant de la surface

$\Phi =$

Exemple : flux à travers une sphère de rayon R du champ créé par une charge ponctuelle Q en O

2) Théorème de Gauss

Théorème de Gauss (admis) (CE):



C'est ce théorème qui permettra de calculer simplement le champ électrostatique dans les distributions à haut degré de symétrie.

3) Théorème de Gauss pour la gravitation

Analogie :

interaction électrostatique	interaction gravitationnelle
Force de Coulomb	Force de Newton
Charge	Masse
Constante	Constante
champ électrostatique	champ gravitationnel
Théorème de Gauss électrostatique	**Théorème de Gauss gravitationnel**

IV. Propriétés de symétrie et d’invariances du champ électrostatique

1) Principe de Curie

C’est un principe général énoncé par Pierre Curie au début du XX$^{\text{ième}}$ siècle qui dit que, dans une expérience de physique, les effets présentent au moins les symétries des causes. On l’applique au champ électrostatique :

2) Propriétés de symétrie

Les plans de symétrie et d’antisymétrie permettent de trouver éventuellement la direction du champ :

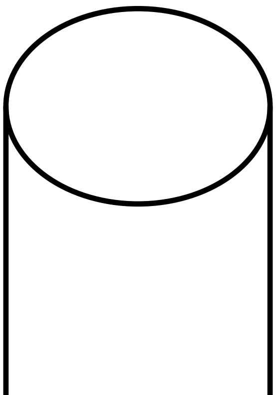
$\Rightarrow \vec{E}(M)$ est contenu dans

$\Rightarrow$ et $\vec{E}(M)$ est normal à

Démo :

3) **Invariances :** elles permettent de trouver de quelles coordonnées dépend $\|\vec{E}\|$

Exemple : cylindre infini uniformément chargé



V. Calculs de champ et potentiels pour des distributions à haut degré de symétrie

On n'étudiera que des distributions à haut degré de symétrie, c'est-à-dire des distributions dont les symétries sont suffisantes pour déterminer la direction du champ électrostatique en tout point et trouver une surface de Gauss sur laquelle on peut appliquer facilement le théorème de Gauss.
CE : Identifier les situations pour lesquelles le champ électrostatique peut être calculé à l'aide du théorème de Gauss
Contre-exemple : spire uniformément chargée

1) Cylindre infini uniformément chargé *(à noter sur une feuille annexe)*

Pour une distribution volumique de charge le champ électrique est continu.

2) Sphère uniformément chargée *(à noter sur une feuille annexe)*

CE : Établir et énoncer qu'à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique, le champ électrostatique créé est le même que celui d'une charge ponctuelle concentrant la charge totale et placée au centre de la distribution.
Savoir aussi faire le calcul du potentiel électrostatique associé.

3) Plan uniformément chargé en surface *(à noter sur une feuille annexe)*

Remarquer la discontinuité de $\vec{E}$ à la traversée de cette surface chargée.

CE : Établir les expressions des champs électrostatiques créés en tout point de l'espace par une sphère uniformément chargée en volume, par un cylindre infini uniformément chargé en volume et par un plan infini uniformément chargé en surface

VI. Modèle du condensateur plan

1) Modèle du condensateur plan

Modèle : On définit (conformément au programme) un condensateur plan comme la superposition de deux distributions surfaciques de charges opposées. Il faut de plus que les dimensions des armatures soient grandes devant la distance qui les sépare.
Schéma à droite :

Symétries et invariances :

Effets de bords négligés :

2) Expression du champ inter-armatures

Première méthode par le théorème de superposition :

Deuxième méthode par le théorème de Gauss :
On admet que le champ est nul dans le métal des armatures.

3) Capacité

Rappel de la définition de la capacité C (cours d'électricité de Math Sup) :

D'où la capacité du condensateur plan :

CE : Établir et citer l'expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide.

4) Aspect énergétique

Charge lente du condensateur C de q=0 à Q :

Un condensateur chargé a emmagasiné l'énergie électrique

D'où la densité volumique d'énergie électrique :

Démo :

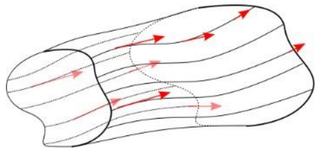
VII. Lignes de champ et surfaces équipotentielles

1) Définitions

On appelle ligne de champ

Une ligne de champ est orientée par une flèche qui indique

Un tube de champ est un



Une surface équipotentielle est

2) Orientation des lignes de champ dans le sens des potentiels décroissants

A savoir justifier

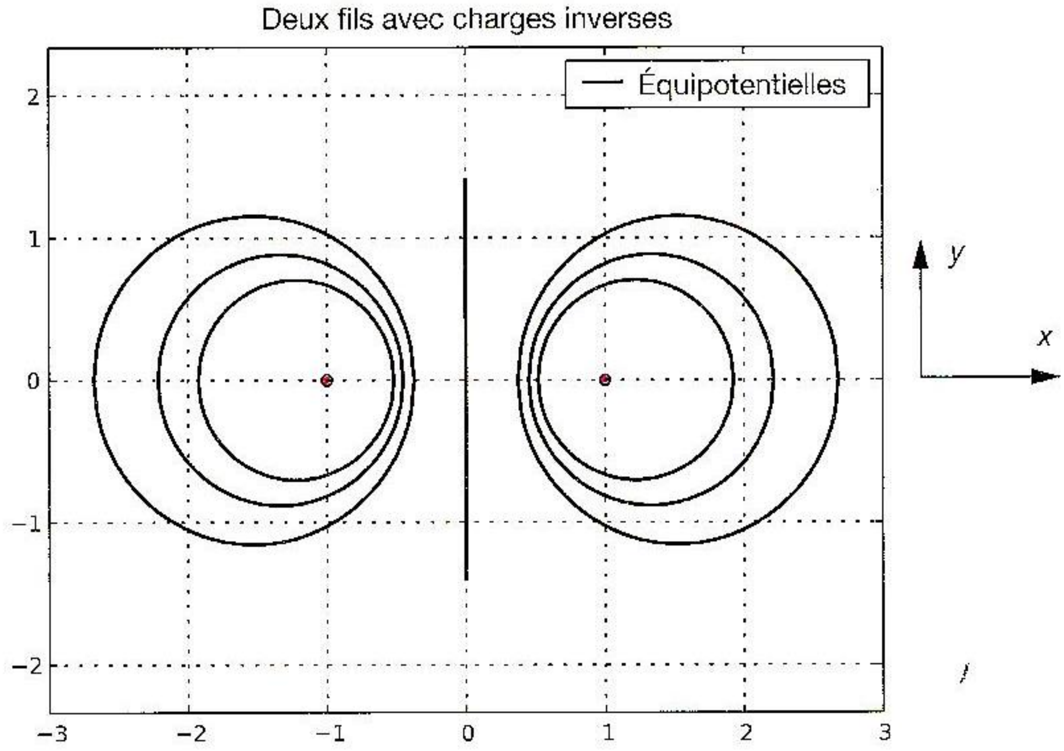
3) Orthogonalité des lignes de champ et surfaces équipotentielles

Démo :

4) Commentaires de cartes de lignes de champ et surfaces équipotentielles

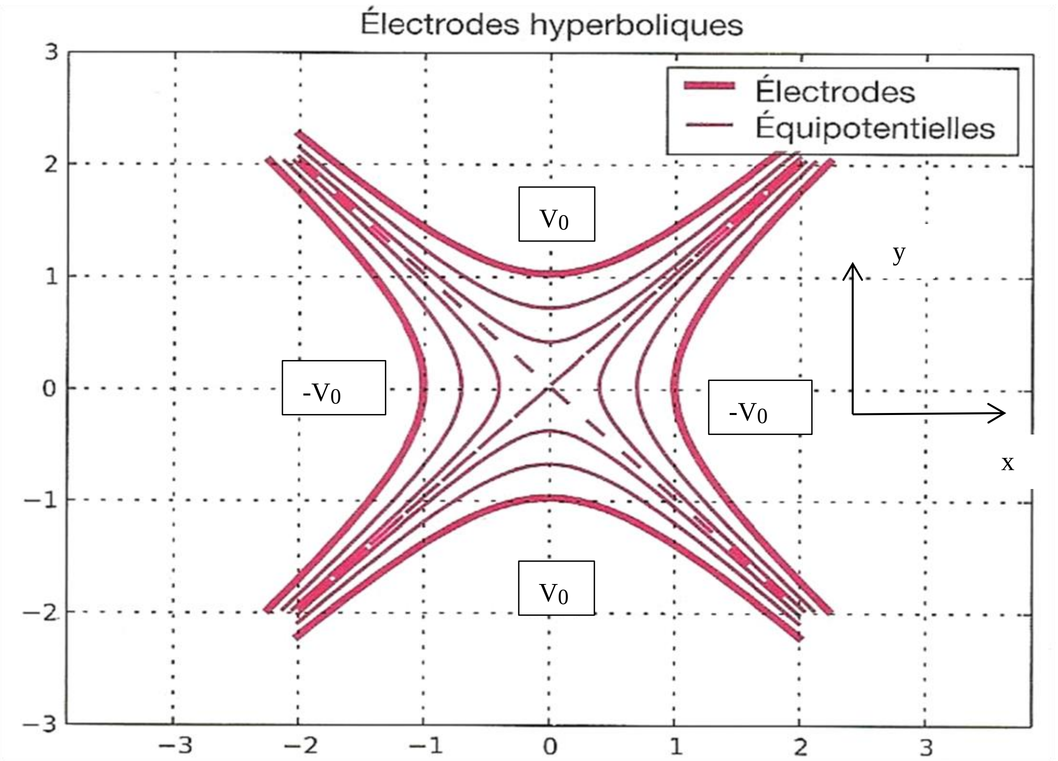
CE : *Orienter les lignes de champ électrostatique créées par une distribution de charges.*
Représenter les surfaces équipotentielles connaissant les lignes de champ et inversement.
Associer les variations de l'intensité du champ électrostatique à la position relative des surfaces équipotentielles.
Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution

Exemple 1 : Deux fils uniformément chargés avec charges inversées



Tracer les lignes de champ et les orienter en supposant que le fil de droite est de charge positive.

Exemple 2 : 4 électrodes de forme hyperbolique portant des potentiels V_0 et $-V_0$.



Tracer les lignes de champ et de les orienter.
Commenter les propriétés de symétrie des équipotentielles.

5) Simulation numérique de lignes de champ

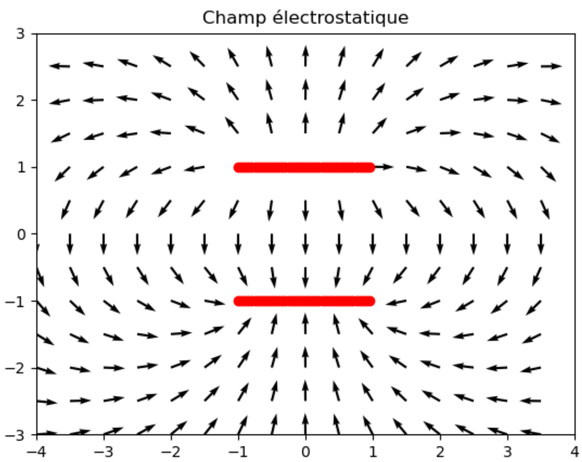
Capacite numérique *: à l'aide d'un langage de programmation, tracer quelques lignes de champ pour une distribution donnée.*

On peut simuler des lignes de champ en utilisant l'instruction quiver de python par exemple par le programme ci-dessous :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Réalisation du maillage de points par l'instruction meshgrid
xmin, ymin, xmax, ymax = -4, -3, 4, 3
h = 0.5                                                          # Que représente h ?
X = np.arange(xmin, xmax, h)
Y = np.arange(ymin, ymax, h)
XX, YY = np.meshgrid(X, Y)

# Placement des charges (charge, abscisse, ordonnée).
distribution = [(-1,-1+0.1*h*i,-1) for i in range(40)]+[(1,-1+0.1*h*i,1) for i in range(40)]     # Combien de charges dans distribution ?
#distribution = [(-1,-1,0),(1,1,0)]          # Pour simuler un doublet de charges

# Calcul du champ électrique total E (on aurait pu aussi calculer deux tableaux Ex et Ey)
E=np.array([XX-XX,YY-YY])                                        # A quoi sert cette ligne ?
for (qk, xk, yk) in distribution:
   # Vecteurs positions centrés sur la charge
   Vect = np.array([XX-xk, YY-yk])
   # Distances de ces positions par rapport à la charge
   Dist = np.array([np.sqrt((XX-xk)**2+(YY-yk)**2)])
   # ou Dist = np.linalg.norm(Vect, axis=0)          # car cette distance est aussi la norme du vecteur position
   # On somme tous les champs par le théorème de superposition
   E = E+9E9*1.6E-19*qk*Vect/Dist**3

# Calcul du champ normalisé EN car seule nous intéresse la direction de la ligne de champ (et le champ est énorme près des charges)
EN = E/np.linalg.norm(E, axis=0)

# Représentation en utilisant quiver
plt.title("Champ électrostatique")
plt.xlim(xmin, xmax)
plt.ylim(ymin, ymax)
# Représentation du champ électrique normalisé par quiver(XX,YY,Ex,Ey)
plt.quiver(XX,YY,EN[0, ::, ::],EN[1, ::, ::])
# Représentation des charges ou de la section des fils
for (qk, xk, yk)in distribution:
  plt.plot(xk,yk,"ro")
plt.show()
```

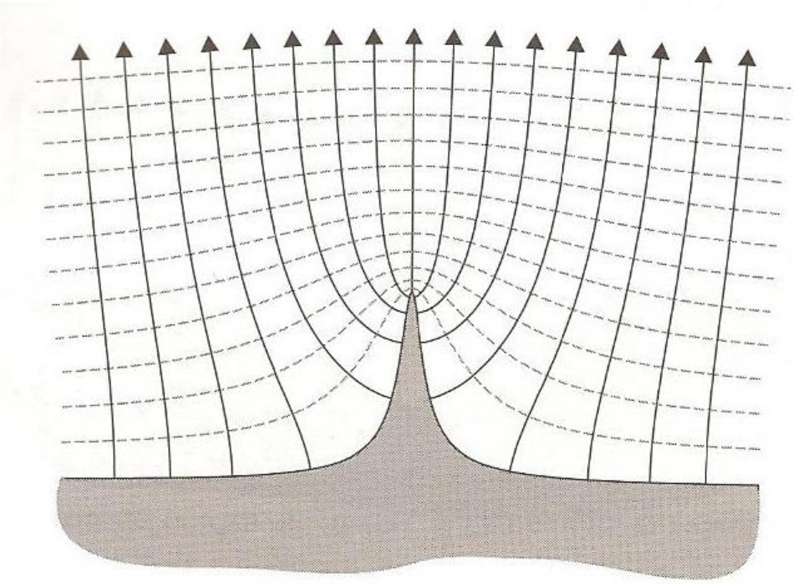
CN : retenir les instructions meshgrid et quiver et comprendre leur utilisation.

Voici la figure obtenue pour le condensateur de dimension finie :



On peut observer les effets de bords.

Effet de pointe



---------- surfaces équipotentielles

lignes de champ

conducteur en équilibre électrostatique

Commentaires :

Effet de pointe : Les charges portées par la surface d’un conducteur tendent à s’accumuler au voisinage des pointes (dans les régions de forte courbure). Au voisinage de ces pointes le champ électrique est plus intense.

Champ disruptif de l’air : $E_d =$