ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 12/11/24

Préparation à l'interrogation n°08

1 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de

$$1-\cos(t)^n = 1-\left(1-\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)\right)^n = 1-\left(1-\frac{nt^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)\right) = \frac{nt^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)$$

2. Équivalent en 1 de $\ln(x)$;
3. Développement asymptotique à 3 termes de $\sqrt{1+n} = \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = \ldots$

2 Dérivation

Dérivée première et seconde de f définie par

$$\forall t \in \left]-1\,;1\right[\qquad f(t) = \mathrm{sh}\left(\mathrm{Arcsin}\,(t)\right)$$

3 Trigonométrie

1. $\sin(p)-\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$
2. $\cos(t)^2 = \frac{1+\cos(2t)}{2}$

4 Formules d'Euler

Soit θ réel. On a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta) \qquad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

5 Inégalités triangulaires

Pour $(x,y)\in\mathbb{K}^2$, on a

$$|x+y| \leqslant |x|+|y| \qquad |x-y| \leqslant |x|+|y| \qquad ||x|-|y|| \leqslant |x-y|$$

6 Séries numériques

1. Comparaison série/intégrale ;
2. Critère de d'Alembert ;
3. Critère des séries alternées ;
4. Contrôle du reste d'une série alternée.

7 Exercice type

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$. La norme $\|\cdot\|_1$ est une norme d'algèbre, c'est-à-dire sous-multiplicative

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\|_1 \leqslant \|\mathrm{A}\|_1 \|\mathrm{B}\|_1$$

mais ce n'est pas une norme d'opérateur.

Corrigé : Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$. On a

$$\|\mathrm{AB}\|_1 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right| \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} |a_{i,k}|\,|b_{k,j}| \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j,k,\ell \leqslant n} |a_{i,j}|\,|b_{k,l}|$$

d'où $\boxed{\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\|_1 \leqslant \|\mathrm{A}\|_1 \|\mathrm{B}\|_1}$

On a $\|\mathrm{I}_n\|_1 = n \neq 1$ ce qui prouve qu'il ne s'agit pas d'une norme d'opérateur.

8 Exercice type

Pour $n \geqslant 2$, on pose $\Delta = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \forall i \neq j \qquad x_i \neq x_j\}$

Montrer que Δ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Corrigé : On pose $\varphi_{i,j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto x_j - x_i$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$. On a

$$\Delta = \bigcap_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \varphi_{i,j}^{-1}(\mathbb{R}^*)$$

Ainsi, l'ensemble Δ est une intersection finie d'images réciproques de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par les applications $\varphi_{i,j}$ continues car polynomiales. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \Delta \text{ est un ouvert.}}$$

Variante : On pose $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)$ polynomiale donc continue et on a $\Delta = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$.

9 Exercice type

On pose

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - \sin y}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ \cos x & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer

$$f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

Corrigé : On a $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ en observant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x, y) = \varphi\left(\frac{x - y}{2}\right) \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la fonction φ est continue par construction.

10 Questions de cours

Topologie, graphes usuels.