


# AMÉLIORATION DES PERFS DES SLCI - CORRECTEUR PI

DM

v1.1 

Instituion Sainte Marie – 2 Rue de l'Abbaye - 92160 Antony

## Asservissement de vitesse d'un capteur d'état de surface

À l'issue des opérations d'usinage, un contrôle de l'état de surface est nécessaire dans certaines industries de précision. Une machine tridimensionnelle équipée d'un palpeur mécanique est alors utilisée.

Elle est constituée d'un moteur électrique à courant continu commandée par une tension d'induit  $U$  associé à un dispositif vis-écrou assurant la transformation du mouvement de rotation délivrée par le moteur en mouvement de translation. La machine de métrologie peut être représentée schématiquement comme en FIGURE 1 :

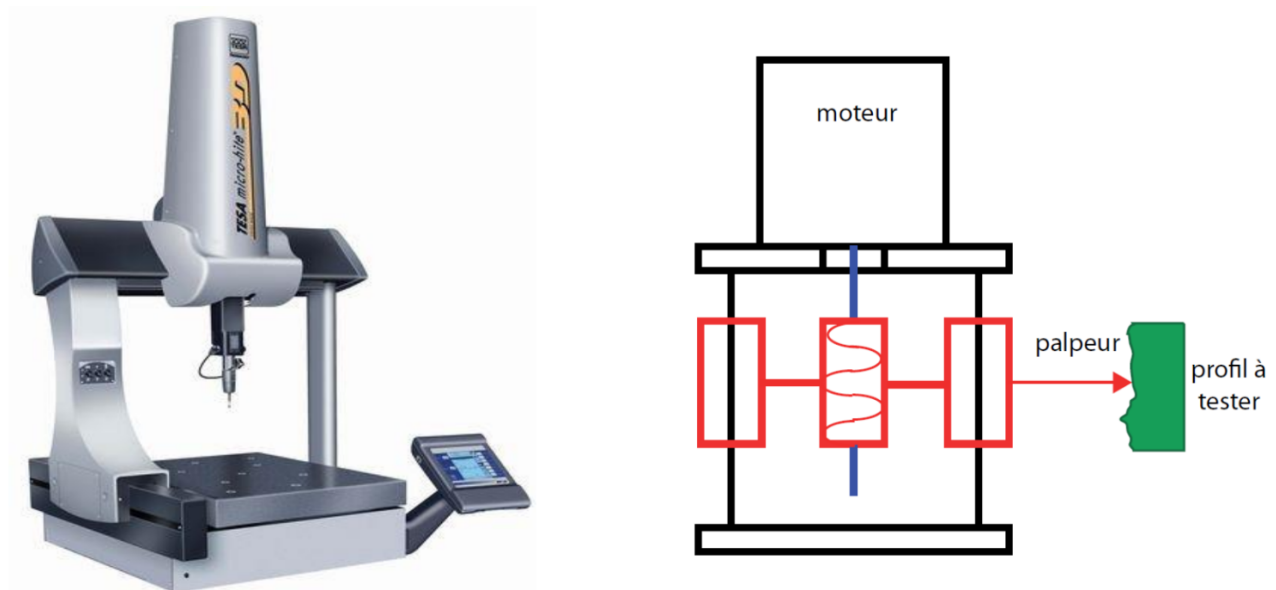


FIGURE 1 – Machine à mesurer tridimensionnelle et modèle cinématique associé.

Les caractéristiques techniques de la machine sont données dans le tableau 1 ci-dessous :

On rappelle les équations caractéristiques du moteur à courant continu :

$$\begin{cases} u(t) & = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \\ c_m(t) - c_r(t) & = J \frac{d\omega(t)}{dt} + f\omega(t) \\ c_m(t) & = K_t \times i(t) \\ e(t) & = K_e \times \omega(t) \end{cases}$$

Symbole	Légende	Valeur	Unité
$R$	Résistance d'induit	0.8	$\Omega$
$L$	Inductance d'induit	$2 \times 10^{-3}$	$H$
$k_c$	Constante de couple	0.2	$N.m.A^{-1}$
$k_e$	Constante de force contre électromotrice	0.5	$V.rad^{-1}.s^{-1}$
$J$	Inertie totale ramenée sur l'axe moteur	$2 \times 10^{-4}$	$kg.m^2$
$f$	Frottement visqueux total ramené sur l'axe moteur	0.5	$N.m.s.rad^{-1}$
$d_v$	Diamètre de la vis d'entraînement	20	mm
$p_v$	Pas du filetage de la vis d'entraînement	0.2	$mm.rad^{-1}$
$u(t)$	Tension de commande d'induit		V
$i(t)$	Courant d'induit		A
$c(t)$	Couple moteur		N.m
$\omega(t)$	Vitesse du palpeur		$m.s^{-1}$

TABLE 1 – Caractéristiques techniques de la machine à mesurer tridimensionnelle.

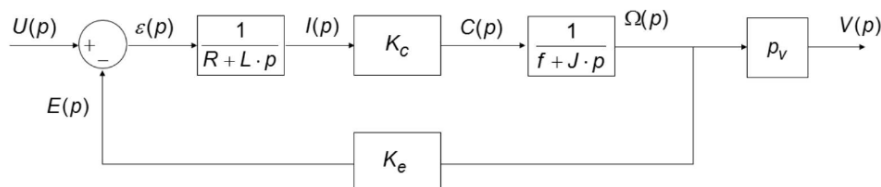
Le cahier des charges de la machine spécifie les valeurs suivantes :

- erreur relative en régime permanent pour une consigne en rampe inférieure à 0.1% ;
- bande passante à  $-6$  dB supérieure à  $3000 \text{ rad.s}^{-1}$  ;
- marge de phase supérieure ou égale à  $45^\circ$ .

### Objectif

Modéliser l'asservissement en vitesse étudié. Caractériser le correcteur adéquat permettant d'asservir la vitesse de déplacement du palpeur le long de la surface usinée.

**Question 1** À partir de la structure de la machine proposée et des variables introduites, proposer, sous forme de schéma blocs, une modélisation de cette machine en considérant comme entrée la tension de l'induit  $U$  et comme sortie la vitesse de déplacement du palpeur



**Question 2** Donner l'expression de la fonction de transfert  $H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$ . Exprimer cette fonction de transfert sous la forme  $H(p) = \frac{G}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$  et donner les valeurs de  $G$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  On a :  $H(p) =$

$$\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K_c}{(R + Lp)(Jp + f) + K_c K_e} = \frac{K_c}{JLp^2(RJ + Lf)p + Rf + K_c K_e} = \frac{\frac{K_c}{Rf + K_c K_e}}{1 + \frac{RJ + Lf}{Rf + K_c K_e}p + \frac{JL}{Rf + K_c K_e}p^2}$$

$$\text{Application numérique : } H(p) = \frac{0,4}{1 + 2,32 \times 10^{-3}p + 8 \times 10^{-7}p^2}$$

En factorisant le dénominateur de  $H(p)$ , on obtient :  $H(p) = \frac{G}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$  avec  $G = 0,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ ,  $\tau_1 = 0,427 \times 10^{-3} \text{ s}$  et  $\tau_2 = 1,863 \times 10^{-3} \text{ s}$

Dans la réalité, le frottement visqueux de facteur  $f$  n'est pas constant. Il dépend de la température ambiante, de la lubrification et varie entre  $0.25$  et  $0.75 \text{ N.m.s.rad}^{-1}$ .

**Question 3** Définir la variation paramétrique associée au gain  $G$  du fait de cette incertitude sur la valeur du coefficient de frottement visqueux. Justifier alors de l'intérêt d'introduire une boucle d'asservissement. Si  $0,25 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad} \leq f \leq 0,75 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$ , alors :  $0,29 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1} \leq G \leq 0,67 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$

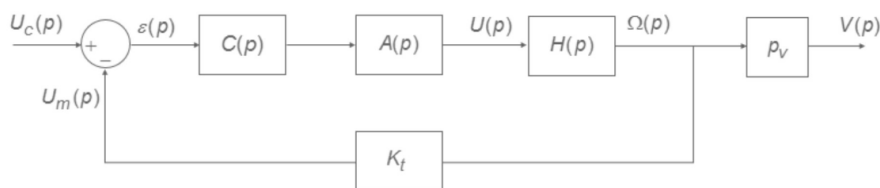
L'existence d'une incertitude sur un des paramètres physiques de cette machine tridimensionnelle ne permet pas d'assurer la précision et la répétabilité du déplacement du palpeur si une commande en boucle ouverte est réalisée. L'introduction d'une boucle d'asservissement va permettre en comparant la consigne et la sortie réelle du système doit permettre d'améliorer les performances.

Un capteur de vitesse angulaire est implanté, il permet de recueillir une tension électrique, image de la vitesse de rotation angulaire du moteur. La loi associée à ce capteur est définie par :

$$u_m(t) = k_t \omega(t) \quad \text{avec : } k_t = 0.25 \text{ V} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

**Question 4** Élaborer le schéma bloc de l'asservissement en faisant apparaître les blocs suivants :

- bloc « processus » défini par la fonction de transfert  $H(p)$  ;
- bloc « correcteur » défini par la fonction de transfert  $C(p)$  ;
- bloc « amplificateur de puissance » défini par la fonction de transfert  $A(p)$  ;
- bloc « capteur de vitesse ».



La dynamique du bloc « amplificateur de puissance » est modélisée par la fonction de transfert :

$$A(p) = \frac{A}{1 + \tau_A p}$$

**Question 5** La dynamique de l'amplificateur étant très élevée devant celle du moteur à commander, proposer une simplification pour la fonction de transfert  $A(p)$ . Si on considère que la constante de temps  $\tau_A$  de l'amplificateur est très faible devant la dynamique du moteur à commander, on peut

supposer, qu'à l'échelle de temps du moteur, il se comporte quasiment instantanément comme un système proportionnel de gain  $A$ . On peut donc utiliser l'expression simplifiée suivante :  $A(p) \approx A$

On peut arriver à la même conclusion en utilisant la notion de pôle dominants :  $\frac{A}{1 + \tau_{AP}} H(p) \approx AH(p)$

**Question 6** Donner la fonction de transfert en boucle ouverte  $T(p) = \frac{U_m(p)}{\varepsilon(p)}$  FTBO :  $T(p) = \frac{U_m(p)}{\varepsilon(p)} = C(p)AH(p)K_t$

Dans la suite du sujet, on prendra  $A = 10$ ,  $G = 0.4 \text{ m.s}^{-1}\text{V}^{-1}$ ,  $\tau_1 = 0.5 \times 10^{-3}\text{s}$  et  $\tau_2 = 2 \times 10^{-3}\text{s}$ .

Un correcteur proportionnel est implanté. Il est défini par  $C(p) = K_1$ .

**Question 7** Déterminer la valeur de  $K_1$  pour que le système asservi respecte la valeur limite de marge de phase du cahier des charges On a :  $T(p) = \frac{GAK_tK_1}{(1 + \tau_1p)(1 + \tau_2p)} = \frac{K_1}{(1 + 0,5 \times 10^{-3}p)(1 + 2 \times 10^{-3}p)}$

On souhaite avoir une marge de phase égale à  $45^\circ$ .  $M_\varphi = 180^\circ + \arg(T(j\omega_{\text{codB}})) = 45^\circ \Rightarrow \arg(T(j\omega_{\text{codB}})) = -135^\circ \Rightarrow \omega_{\text{codB}} = 2850 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

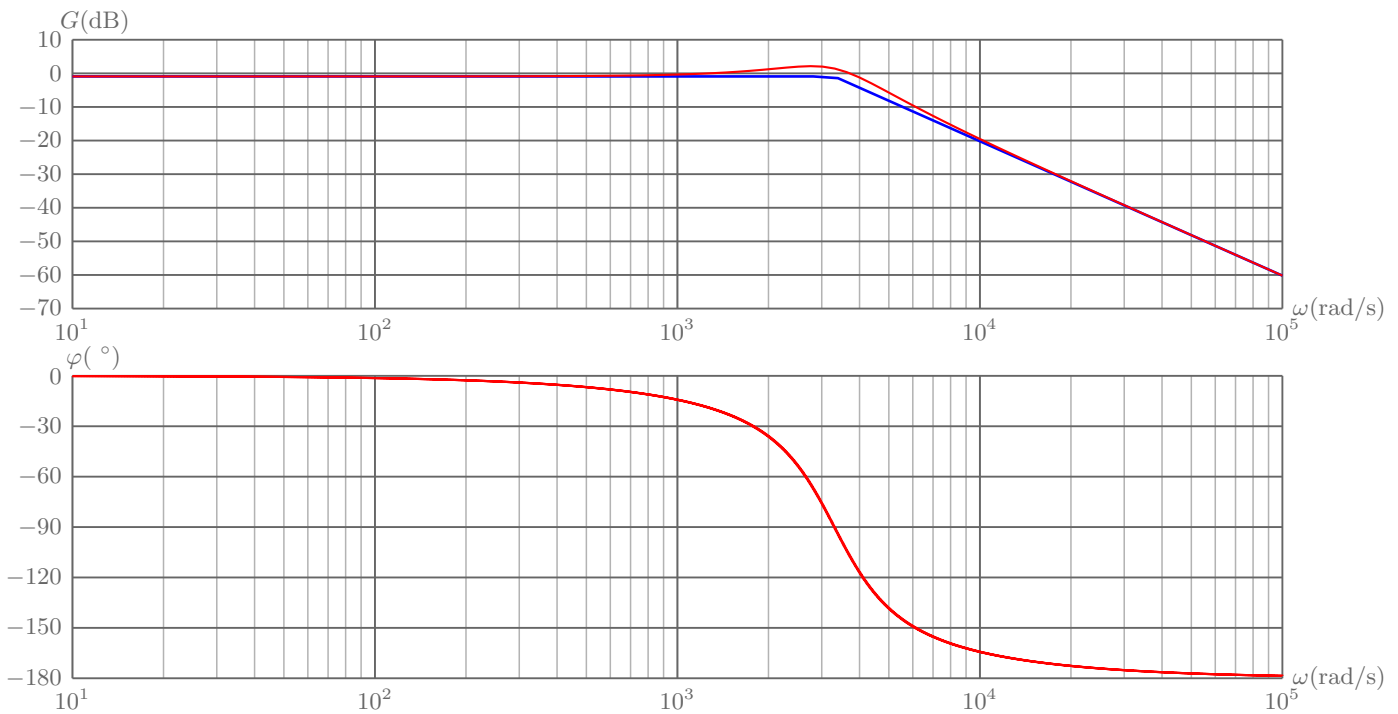
Or  $\omega_{\text{codB}}$  est la pulsation telle que :  $|T(j\omega_{\text{codB}})| = 1 \Rightarrow K_1 = 9,86$  Si besoin :  $|T(j\omega_{\text{codB}})| = \frac{K_1}{\sqrt{1 + (0,5 \times 10^{-3}\omega_{\text{codB}})^2} \sqrt{1 + (2 \times 10^{-3}\omega_{\text{codB}})^2}}$  :

**Question 8** Déterminer l'erreur relative en régime permanent pour une consigne en rampe pour cette valeur de  $K_1$ . Conclure quant au respect du cahier des charges La FTBO est de classe nulle, l'erreur vis-à-vis d'une consigne en rampe est donc infinie. Le cahier des charges n'est donc pas satisfait.

**Question 9** Tracer la réponse fréquentielle du système sur un diagramme de Bode et en déduire la bande passante à  $-6 \text{ dB}$  du système asservi. Conclure quant au respect du cahier des charges

$$\text{FTBF} : H_{BF}(p) = \frac{V(p)}{V_c(p)} = K_t \frac{GAK_1}{(1 + \tau_1p)(1 + \tau_2p) + GAK_tK_1} = \frac{\frac{\tau_1 + \tau_2}{1 + GAK_tK_1}}{1 + \frac{\tau_1\tau_2}{1 + GAK_tK_1}p + \frac{1}{1 + GAK_tK_1}p^2}$$

Application numérique :  $H_{BF}(p) = \frac{0,9}{1 + 2,3 \times 10^{-4}p + 9,2 \times 10^{-8}p^2} \Rightarrow \omega_{0BF} = 3295 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $z_{BF} = 0,38$



Graphiquement, on relève :  $\omega_{-6 \text{ dB}} \approx 5 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} > 3000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Le cahier des charges est donc satisfait.

Le correcteur proportionnel est remplacé par un correcteur proportionnel intégral défini par :

$$C(p) = \frac{K_3(1 + \tau_3 p)}{p}$$

**Question 10** Justifier le choix d'utiliser ce type de correction. En augmentant la classe de la FTBO, et à condition d'utiliser le bon réglage pour ce correcteur, on espère avoir une erreur en poursuite, pour une consigne en rampe, inférieure à la limite du cahier des charges tout en conservant une bonne rapidité et une stabilité suffisante.

**Question 11** Proposer une valeur de  $\tau_3$  permettant de compenser le mode le plus lent de la fonction de transfert en boucle ouverte. Déterminer alors la valeur de  $K_3$  pour que pour que le système asservi respecte la valeur limite de marge de phase du cahier des charges. La méthode de réglage d'un correcteur PI par compensation du pôle dominant consiste à choisir le coefficient  $\tau_3$  de façon à compenser (éliminer) le pôle dominant de la FTBO.

Ce réglage doit permettre de conserver une bonne rapidité et une bonne stabilité, on parle aussi de compensation du mode lent. Dans notre cas, on cherche à compenser le pôle  $-\frac{1}{2 \times 10^{-3}}$  de la FTBO. On choisit donc une constante de temps  $\tau_3 = 2 \times 10^{-3} \text{ s}$

La FTBO du système corrigé devient alors :  $T(p) = \frac{\overbrace{Ak_t G}^{=1} K_3 (1 + 2 \times 10^{-3} p)}{p(1 + 0,5 \times 10^{-3} p)(1 + 2 \times 10^{-3} p)} = \frac{K_3}{p(1 + 0,5 \times 10^{-3} p)}$

On souhaite avoir une marge de phase égale à  $45^\circ$ .  $M_\varphi = 180^\circ + \arg(T(j\omega_{\text{codB}})) = 45^\circ \Rightarrow \arg(T(j\omega_{\text{codB}})) = -135^\circ \Rightarrow \omega_{\text{codB}} = 2000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  Or  $\omega_{\text{COdB}}$  est la pulsation telle que :  $|T(j\omega_{\text{codB}})| =$

$$1 \Rightarrow K_3 = 2830 \text{ Si besoin : } |T(j\omega_{\text{Co dB}})| = \frac{K_3}{\omega_{0 \text{ dB}} \sqrt{1 + (0,5 \times 10^{-3} \omega_{0 \text{ dB}})^2}}$$

**Question 12** Déterminer l'erreur relative en régime permanent pour une consigne en rampe pour cette valeur de  $K_3$ . Conclure. La FTBO est de classe 1. L'erreur vis-à-vis d'une consigne en rampe est donc finie et non nulle. On a :  $e_r\%(+\infty) = \frac{1}{K_{BO}} = \frac{1}{K_3} = 3,54 \times 10^{-4} < 0,1\%$  Le critère de précision du cahier des charges est donc respecté avec ce correcteur.