ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°30

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On pose $\mathcal{O} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \mid \mathrm{P}(0) \neq 0\}$ et on note

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}_1(\mathrm{P}) = \operatorname*{Sup}_{t \in [0;1]} |\mathrm{P}(t)| \qquad \mathrm{N}_2(\mathrm{P}) = \operatorname*{Sup}_{t \in [1;2]} |\mathrm{P}(t)|$$

Déterminer la nature topologique de $\mathcal{O}$ pour les normes N_1 et N_2.

Indications : Étudier la continuer de l'application $\mathrm{P} \in \mathrm{E} \mapsto \mathrm{P}(0)$ puis considérer une suite simple à valeurs dans $\mathrm{E} \smallsetminus \mathcal{O}$ pour discuter selon la norme N_1. Considérer la suite $(\mathrm{P}_n)_n$ avec $\mathrm{P}_n = (1 - \mathrm{X}/2)^n$ et $(1 - \mathrm{P}_n)_n$ pour discuter selon la norme N_2.

Corrigé : Notons $\varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(0)$. L'application est clairement continue pour N_1 et on a $\mathcal{O} = \varphi^{-1}(\{0\})$. Puis, la suite $(\mathrm{P}_n)_n$ avec $\mathrm{P}_n = \dfrac{1}{n}$ pour n entier non nul est à valeurs dans $\mathcal{O}$, convergente de limite nulle donc hors de $\mathcal{O}$ et par conséquent

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{O} \text{ est ouvert non fermé pour la norme } \mathrm{N}_1.}$$

Posons $\mathrm{P}_n = (1 - \mathrm{X}/2)^n$ pour n entier. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \varphi(\mathrm{P}_n) = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_2(\mathrm{P}_n) = \operatorname*{Sup}_{t \in [1;2]} \left| \left(1 - \frac{t}{2}\right)^n \right| = \frac{1}{2^n}$$

Ainsi $$\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{N}_2} 0 \quad \text{et} \quad \varphi(\mathrm{P}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq \varphi(0)$$

L'application φ n'est donc pas continue pour N_2. Considérons $\mathrm{Q}_n = \mathrm{P}_n - 1$ pour tout n entier. On a $\mathrm{Q}_n \in \mathrm{E} \smallsetminus \mathcal{O}$ pour tout n entier et $\mathrm{Q}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{N}_2} -1 \notin \mathrm{E} \smallsetminus \mathcal{O}$ d'où $\mathrm{E} \smallsetminus \mathcal{O}$ n'est pas fermé, autrement dit $\mathcal{O}$ n'est pas un ouvert de E. De même, on a $\mathrm{P}_n \in \mathcal{O}$ pour tout n entier et $\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{N}_2} 0$ avec $0 \notin \mathcal{O}$, donc $\mathcal{O}$ n'est pas un fermé de E. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{O} \text{ n'est ni ouvert, ni fermé pour la norme } \mathrm{N}_2.}$$

Exercice 2 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et $\mathrm{A} = \left\{ f \in \mathrm{E} \mid f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1 \right\}$.

1. Montrer que A est une partie fermée de E.
2. Montrer que $\qquad \forall f \in \mathrm{A} \qquad \|f\|_\infty > 1$
3. Calculer $\mathrm{d}(0, \mathrm{A})$.

Indications : 1. Écrire A comme intersection d'images réciproques.
2. Procéder par l'absurde.
3. Considérer la fonction continue f_n définie par $f_n(t) = n^2t/(n-1)$ pour $t \in \left[0\,;\frac{1}{n}\right]$ et constante sur $\left[\frac{1}{n}\,;1\right]$.

Corrigé : 1. Notons $\varphi_1 : f \mapsto f(0)$ et $\varphi_2 : f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Les applications φ_1 et φ_2 sont continues pour $\|\cdot\|_\infty$ et on a

$$\mathrm{A} = \varphi_1^{-1}(\{0\}) \cap \varphi_2^{-1}([\,1\,;+\infty\,[)$$

La partie A est donc une intersection d'images réciproques de fermés par des applications continues. On conclut

$$\boxed{\text{La partie A est un fermé.}}$$

2. Soit $f \in \mathrm{A}$ avec $\|f\|_\infty \leqslant 1$. On a

$$1 \leqslant \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 (1 - f(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

La fonction $t \mapsto 1 - f(t)$ est continue positive d'intégrale nulle donc nulle. Il s'ensuit que f est constante égale à 1 ce qui contredit son annulation en 0. Ainsi

$$\boxed{\forall f \in \mathrm{A} \qquad \|f\|_\infty > 1}$$

3. D'après ce qui précède, on a clairement $\mathrm{d}(0, \mathrm{A}) \geqslant 1$. Pour n entier avec $n \geqslant 2$, on pose f_n affine par morceaux avec $f_n(t) = n^2t/(n-1)$ pour $t \in \left[0\,;\frac{1}{n}\right]$ puis constante sur $\left[\frac{1}{n}\,;1\right]$. On trouve $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1$ et $\|f_n\|_\infty = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{d}(0, \mathrm{A}) = 1}$$

Exercice 3 (***)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-evn et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue
(ii) $\forall \mathrm{A} \subset \mathrm{E} \qquad f(\bar{\mathrm{A}}) \subset \overline{f(\mathrm{A})}$
(iii) $\forall \mathrm{B} \subset \mathrm{F} \qquad \overline{f^{-1}(\mathrm{B})} \subset f^{-1}(\bar{\mathrm{B}})$
(iv) $\forall \mathrm{B} \subset \mathrm{F} \qquad f^{-1}(\mathring{\mathrm{B}}) \subset (f^{-1}(\mathrm{B}))^\circ$

Indications : Montrer le cycle d'implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i). Exploiter la caractérisation séquentielle pour (i) $\Longrightarrow$ (ii). Considérer $f^{-1}(\mathrm{B}(f(x_0), \varepsilon))$ avec $x_0 \in \mathrm{E}$ et $\varepsilon > 0$ pour (iv) $\Longrightarrow$ (i).
Corrigé : Supposons f continue. Soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ et $x \in \bar{\mathrm{A}}$. Par caractérisation séquentielle, il existe $(x_n)_n \in \mathrm{A}^\mathbb{N}$ tel que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Par continuité de f, on a $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ d'où $f(x) \in \overline{f(\mathrm{A})}$ ce pour tout $x \in \bar{\mathrm{A}}$. Ainsi, on a (i) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons (ii). Soit $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$ et $\mathrm{A} = f^{-1}(\mathrm{B})$. On a $f(\mathrm{A}) \subset \mathrm{B}$ puis

$$f\left(\bar{\mathrm{A}}\right) \subset \overline{f(\mathrm{A})} \subset \bar{\mathrm{B}}$$

et comme $\bar{\mathrm{A}} \subset f^{-1}\left(f\left(\bar{\mathrm{A}}\right)\right)$, on obtient

$$\overline{f^{-1}(\mathrm{B})} \subset f^{-1}(\bar{\mathrm{B}})$$

L'implication (iii) $\Longrightarrow$ (iv) est immédiate par complémentarité. Enfin, supposons (iv). Soit $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in \mathrm{E}$. On a

$$f^{-1}\left(\mathrm{B}(f(x_0),\varepsilon)\right) \subset \left(f^{-1}\left(\mathrm{B}(f(x_0),\varepsilon)\right)\right)^{\circ}$$

Il s'agit donc d'une égalité d'où $f^{-1}\left(\mathrm{B}(f(x_0),\varepsilon)\right)$ est ouvert. Ainsi, il existe $\eta > 0$ tel que $\mathrm{B}(x_0,\eta) \subset f^{-1}\left(\mathrm{B}(f(x_0),\varepsilon)\right)$ ce qui signifie exactement

$$\exists \eta > 0 \quad | \quad \forall x \in \mathrm{E} \qquad \|x - x_0\| < \eta \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

On conclut $\boxed{\text{Les quatre assertions sont équivalentes.}}$

Exercice 4 (***)

Soit n entier non nul et Ω_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ scindé à racines simples. Montrer que Ω_n est un ouvert.

Indications : Pour $\mathrm{P} \in \Omega_n$, notant $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ les racines de P, considérer $\beta_0, \ldots, \beta_n$ tels que $\beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \ldots < \alpha_n < \beta_n$ puis $f : \mathrm{Q} \mapsto (\mathrm{Q}(\beta_0), \ldots, \mathrm{Q}(\beta_n))$ et remarquer que f linéaire sur un espace de dimension finie.

Corrigé : Soit $\mathrm{P} \in \Omega_n$. On note $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ les racines distinctes de P. Soit $\beta_0, \ldots, \beta_n$ des réels tels que $\beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \ldots < \alpha_n < \beta_n$. On considère $f : \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}^{n+1}, \mathrm{Q} \mapsto (\mathrm{Q}(\beta_0), \ldots, \mathrm{Q}(\beta_n))$. L'application f est linéaire sur un espace de dimension finie donc continue. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on peut choisir $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que si $\|\mathrm{Q} - \mathrm{P}\| \leqslant \varepsilon$, alors $\mathrm{Q}(\beta_i)\mathrm{P}(\beta_i) > 0$ pour tout $i \in [\![0\,;\, n]\!]$. Par suite, on a $\mathrm{Q}(\beta_i)\mathrm{Q}(\beta_{i+1}) < 0$ pour tout $i \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ ce qui prouve que Q est scindé à racines simples. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(\mathrm{P},\varepsilon) \subset \Omega_n$. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \Omega_n \text{ est un ouvert.}}$$

Exercice 5 (***)

Soit $\mathrm{E} = \left\{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n| \text{ converge}\right\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par $\|u\|_1 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ pour $u \in \mathrm{E}$ et $\varphi \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E},\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique $(y_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bornée tel que $\varphi(u) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n y_n$ pour tout $u \in \mathrm{E}$.

Indications : Procéder par analyse synthèse en utilisant les suites $\delta_k = \left(\delta_{k,n}\right)_n$ pour k entier. Lors de la synthèse, exploiter une caractérisation de la continuité de φ.

Corrigé : On procède par analyse/synthèse.

• **Analyse :** On suppose l'existence de y. Soit k entier et $\delta_k = (\delta_{k,n})_n$. On a $\varphi(\delta_k) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \delta_{k,n} y_n = y_k$. La suite $y = (y_n)_n = (\varphi(\delta_n))_n$ est donc déterminée de manière unique sous réserve d'existence.

• **Synthèse :** On choisit le y précédemment déterminé. L'application φ est linéaire continue donc lipschitzienne en 0, *i.e.* il existe $\mathrm{C} \geqslant 0$ tel que

$$\forall u \in \mathrm{E} \qquad |\varphi(u)| \leqslant \mathrm{C}\|u\|_1$$

Ainsi $\quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |y_n| = |\varphi(\delta_n)| \leqslant \mathrm{C}\|\delta_n\|_1 = \mathrm{C}$

Soit N entier et $u \in \mathrm{E}$. La série $\sum u_n y_n$ converge absolument. Par linéarité, on a

$$\varphi\left(\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u\delta_n\right) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \varphi(u\delta_n) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \varphi(u_n\delta_n) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_n\varphi(\delta_n) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_n y_n \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n y_n$$

Enfin, comme le reste d'une série convergente est de limite nulle, il vient

$$\|\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u\delta_n - u\|_1 = \|\sum_{n\geqslant \mathrm{N}+1} u\delta_n\|_1 = \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} u_n \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$$

Par continuité, il en résulte $\qquad \varphi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n y_n$

On conclut

$$\boxed{\text{Il existe un unique } (y_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \text{ bornée tel que } \varphi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n y_n \text{ pour tout } u \in \mathrm{E}.}$$

Remarque : L'espace E est habituellement noté $\ell^1(\mathbb{N})$ et l'espace des suites bornées noté $\ell^\infty(\mathbb{N})$. L'ensemble des formes linéaires continues sur $\ell^1(\mathbb{N})$ est appelé *dual topologique* de $\ell^1(\mathbb{N})$ et noté $\ell^1(\mathbb{N})'$. On a démontré précédemment l'égalité

$$\ell^1(\mathbb{N})' \simeq \ell^\infty(\mathbb{N})$$

Exercice 6 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et A une partie non vide bornée de E. On note $\delta(\mathrm{A}) = \underset{(x,y)\in\mathrm{A}^2}{\mathrm{Sup}} \|x-y\|$. Montrer

$$\delta(\mathrm{A}) = \delta(\bar{\mathrm{A}}) = \delta(\partial\mathrm{A})$$

Indications : Montrer que $\bar{\mathrm{A}}$ est bornée puis $\delta(\mathrm{A}) = \delta(\bar{\mathrm{A}})$ par double inégalité. Pour $\delta(\bar{\mathrm{A}}) \leqslant \delta(\mathrm{A})$, utiliser une caractérisation séquentielle des points adhérents. Puis, pour a, b distincts dans A, considérer $\varphi : t \mapsto a + t(b-a)$ et $\mathrm{I} = \{t \in \mathrm{R} \mid \varphi(t) \in \mathrm{A}\}$. Montrer que I est une partie non vide, bornée de $\mathbb{R}$ puis, notant $t_0 = \mathrm{Inf\ I}$ et $t_1 = \mathrm{Sup\ I}$, établir que $\varphi(t_0)$ et $\varphi(t_1)$ sont sur la frontière. Conclure.

Corrigé : Il existe $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que $\|x\| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $x \in \mathrm{A}$. Ainsi, pour $x \in \bar{\mathrm{A}}$, comme il existe $(x_n)_n \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ avec $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, on a

$$\|x\| = \lim_{n\to+\infty} \|x_n\| \leqslant \mathrm{M}$$

On en déduit que $\bar{\mathrm{A}}$ est bornée et $\partial\mathrm{A} \subset \bar{\mathrm{A}}$ également. Avec $\mathrm{A} \subset \bar{\mathrm{A}}$, il vient clairement $\delta(\mathrm{A}) \leqslant \delta(\bar{\mathrm{A}})$. Soit $(a,b) \in \bar{\mathrm{A}}^2$. Il existe $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ dans $\mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ telles que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ et $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$. Ainsi

$$\|a-b\| = \lim_{n\to+\infty} \|a_n - b_n\| \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \|a_n - b_n\| \leqslant \delta(\mathrm{A})$$

Par conséquent $\qquad \boxed{\delta(\mathrm{A}) = \delta(\bar{\mathrm{A}})}$

Soit $(a,b) \in \mathrm{A}^2$ distincts (si A est un singleton, le problème est trivial). On pose $\varphi : t \mapsto a + t(b-a)$. L'ensemble $\mathrm{I} = \{t \in \mathbb{R} \mid \varphi(t) \in \mathrm{A}\}$ est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. En effet, pour $t \in \mathrm{I}$, on a

$$|t| = \frac{1}{\|b-a\|}\|t(b-a) + a - a\| \leqslant \frac{1}{\|b-a\|}\,(\mathrm{M} + \|a\|)$$

On note $t_0 = \operatorname{Inf} \mathrm{I}$ et $t_1 = \operatorname{Sup} \mathrm{I}$. On a clairement $t_1 \geqslant 1$ et $t_0 \leqslant 0$. Par caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures, on obtient $\varphi(t_0) \in \bar{\mathrm{A}}$ et $\varphi(t_1) \in \bar{\mathrm{A}}$. Supposons $\varphi(t_1) \in \mathring{\mathrm{A}}$. Il existe alors $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(\varphi(t_1), r) \subset \mathrm{A}$. Il s'ensuit

$$\varphi\left(t_1 + \frac{r}{2\|b-a\|}\right) = \varphi(t_1) + \frac{r}{2}\frac{b-a}{\|b-a\|} \in \mathrm{B}(\varphi(t_1), r) \subset \mathrm{A} \quad \text{et} \quad t_1 + \frac{r}{2\|b-a\|} > t_1$$

ce qui est absurde par choix de t_1. On en déduit que $\varphi(t_1) \notin \mathring{\mathrm{A}}$ d'où $\varphi(t_1) \in \bar{\mathrm{A}} \smallsetminus \mathring{\mathrm{A}} = \partial\mathrm{A}$. On procède à l'identique pour $\varphi(t_0)$. Enfin, on a

$$\|\varphi(t_1) - \varphi(t_0)\| = \|(t_1 - t_0)(b-a)\| = (t_1 - t_0)\|b-a\| \geqslant \|b-a\|$$

d'où $$\forall (a,b) \in \mathrm{A}^2 \qquad \delta(\partial\mathrm{A}) \geqslant \|b-a\|$$

Passant à la borne supérieure, on obtient $\delta(\partial\mathrm{A}) \geqslant \delta(\mathrm{A})$ et comme $\partial\mathrm{A} \subset \mathrm{A}$, on a $\delta(\partial\mathrm{A}) \leqslant \delta(\bar{\mathrm{A}}) = \delta(\mathrm{A})$. On conclut

$$\boxed{\delta(\mathrm{A}) = \delta(\bar{\mathrm{A}}) = \delta(\partial\mathrm{A})}$$

Exercice 7 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn. Montrer que les seules parties ouvertes et fermées de E sont $\varnothing$ et E lui-même.

Indications : Considérer A une partie ouverte et fermée non vide de E et différente de E puis pour $a \in \mathrm{A}$ et $b \notin \mathrm{A}$, étudier l'ensemble I défini par

$$\mathrm{I} = \{t \in [\,0\,;1\,] \mid \varphi(t) \in \mathrm{A}\}$$

avec $\varphi(t) = a + t(b-1)$ pour t réel.

Corrigé : Soit A une partie ouverte et fermée et non vide de E. Supposons $\mathrm{A} \neq \mathrm{E}$. Soit $a \in \mathrm{A}$ et $b \notin \mathrm{A}$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = a + t(b-a) \quad \text{et} \quad \mathrm{I} = \{t \in [\,0\,;1\,] \mid \varphi(t) \in \mathrm{A}\}$$

L'ensemble I est une partie non vide car $0 \in \mathrm{I}$ et majorée par 1 donc admet une borne supérieure finie $\alpha \in [\,0\,;1\,]$. Par caractérisation séquentielle, il existe $(\alpha_n)_n \in \mathrm{I}^{\mathbb{N}}$ telle que $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$. L'application φ est continue car $\|b-a\|$-lipschitzienne et par continuité, on a

$$\varphi(\alpha_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(\alpha) \in \bar{\mathrm{A}} = \mathrm{A}$$

Par ailleurs, l'ensemble A est ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(\varphi(\alpha), r) \subset \mathrm{A}$. Il s'ensuit

$$\varphi\left(\alpha + \frac{r}{2\|b-a\|}\right) = \varphi(\alpha) + \frac{r}{2}\frac{b-a}{\|b-a\|} \in \mathrm{B}(\varphi(\alpha), r) \subset \mathrm{A} \quad \text{et} \quad \alpha + \frac{r}{2\|b-a\|} > \alpha$$

ce qui est absurde par définition de α en tant que borne supérieure de I. L'hypothèse qu'il existe une partie A ouverte et fermée non vide de E et distincte de E est donc fausse. On conclut

$$\boxed{\text{Les parties ouvertes et fermés de E sont } \varnothing \text{ et E lui-même.}}$$

Variantes : (a) On a $\varphi(1) = b \notin \mathrm{A}$ d'où $\alpha < 1$ et par définition de α, on a $\varphi(t) \notin \mathrm{A}$ pour tout $t \in \,]\,\alpha\,;1\,]$. Comme $\mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{A}$ est fermé, considérant une suite $(\beta_n)_n \in \,]\,\alpha\,;1\,]^{\mathbb{N}}$ avec $\beta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$, il vient par continuité

$$\varphi(\beta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(\alpha) \in \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{A}$$

ce qui contredit $\varphi(\alpha) \in \mathrm{A}$.

(b) On montre que $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}$ est continue. Si $x \in \mathrm{A}$, alors il existe U ouvert $\subset \mathrm{A}$ tel que $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(y) = 1$ pour tout $y \in \mathrm{U}$ d'où la continuité. Si $x \notin \mathrm{A}$, on fait de même puisque $\mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{A}$ est ouvert. Ainsi, on a $t \mapsto \mathbb{1}_{\mathrm{A}}(xt + (1-t)y)$ continue avec $x \in \mathrm{A}$ et $y \notin \mathrm{A}$ et on obtient une contradiction.