ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°28

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$. Représenter les boules unités fermées pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 2 (*)

Déterminer la nature topologique de $\Delta = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad | \quad x_1 = \ldots = x_n\}$ puis préciser $\bar{\Delta}$ et $\mathring{\Delta}$.

Exercice 3 (*)

Montrer que le graphe d'une application $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue avec I intervalle fermé est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et A un fermé non vide. On suppose que $x \mapsto \mathrm{d}(x, \mathrm{A})$ est convexe.

1. Montrer que A est convexe.
2. Le résultat a-t-il encore lieu sans l'hypothèse de fermeture de A ?

Exercice 5 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et A, B des parties de E avec A ou B ouvert. Montrer que $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ est un ouvert.

Exercice 6 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et A, B des parties de E.

1. Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, comparer $\mathring{\mathrm{A}}$ avec $\mathring{\mathrm{B}}$ et $\bar{\mathrm{A}}$ avec $\bar{\mathrm{B}}$.
2. Comparer $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^\circ$ avec $\mathring{\mathrm{A}} \cup \mathring{\mathrm{B}}$ puis $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})^\circ$ avec $\mathring{\mathrm{A}} \cap \mathring{\mathrm{B}}$.
3. Même question pour l'adhérence.

Exercice 7 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et F un fermé de E.

1. Montrer que F peut s'écrire comme image réciproque d'un fermé par une application continue de E dans $\mathbb{R}$.
2. En déduire que F peut s'écrire comme intersection décroissante d'ouverts de E.

Exercice 8 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et A, B des parties de E. On note $C = \overline{\mathring{A}}$. Montrer

$$(A \setminus B)^\circ = \mathring{A} \setminus \bar{B} \qquad \overline{\mathring{C}} = C$$

Exercice 9 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et F un sev de E.

1. Montrer que $\bar{F}$ est un sev de E.
2. Montrer qu'un hyperplan est soit dense, soit fermé.

Exercice 10 (**)

Montrer la continuité de l'application qui à $M \in GL_n(\mathbb{K})$ associe son inverse.

Exercice 11 (**)

Étudier la continuité éventuelle des applications suivantes :

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Arctan}(xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^y}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ e^x & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 12 (**)

On pose $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = x^2 + xy + y^2$

Étudier si f admet une limite pour $\|(x,y)\| \to +\infty$.

Exercice 13 (**)

Soit $E = \mathscr{C}^0([0;1], \mathbb{R})$.

1. Déterminer une norme sur E telle que le produit dans E soit continu.
2. Pour E muni de $\|\cdot\|_1$, le produit est-il continu ?

Exercice 14 (**)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ pour qu'il existe $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $M^n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$.

Exercice 15 (**)

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un fermé d'intérieur vide.