ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°29

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\forall \mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n \in \mathrm{E} \qquad \|\mathrm{P}\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

Étudier la continuité des applications définies par

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) \quad \text{et} \quad \psi(\mathrm{P}) = \mathrm{AP} \quad \text{avec} \quad \mathrm{A} \in \mathrm{E}$$

Exercice 2 (**)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev normés et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$. Soit $\mathscr{T}$ l'ensemble des ouverts de F. Montrer

$$f \text{ continue} \iff \forall \mathrm{U} \in \mathscr{T} \qquad f^{-1}(\mathrm{U}) \text{ ouvert de E}$$

Exercice 3 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$.

1. Montrer $$\mathrm{A} \text{ fermé} \iff \partial\mathrm{A} \subset \mathrm{A}$$
2. Montrer $$\mathrm{A} \text{ ouvert} \iff \mathrm{A} \cap \partial\mathrm{A} = \varnothing$$

Exercice 4 (**)

Soit A partie non vide de E. Comparer $\mathrm{d}(\cdot, \mathrm{A})$ et $\mathrm{d}(\cdot, \bar{\mathrm{A}})$.

Exercice 5 (**)

L'application définie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ par $\mathrm{M} \mapsto \pi_{\mathrm{M}}$ est-elle continue ?

Exercice 6 (**)

Déterminer l'intérieur d'une sphère.

Exercice 7 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et A une partie convexe de E. Montrer que $\bar{\mathrm{A}}$ et $\mathring{\mathrm{A}}$ sont convexes.

Exercice 8 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn.

1. Soit $a \in \mathrm{E}$ et $r > 0$. Montrer $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{B}(a, r)) = \mathrm{E}$.
2. Montrer que tout sev strict de E est d'intérieur vide.

Exercice 9 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev normé, $a \in \mathrm{E}$ et $r > 0$. Montrer $\overline{\mathrm{B}(a,r)} = \mathrm{B}_f(a,r)$.

Exercice 10 (**)

1. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer $$\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}$$
3. Montrer $$\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathrm{Com}(\mathrm{AB}) = (\mathrm{Com}\,\mathrm{A})\,(\mathrm{Com}\,\mathrm{B})$$

Exercice 11 (***)

Montrer qu'une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé.

Exercice 12 (***)

Soit n entier non nul et $p \in [\![\, 0\,;\, n \,]\!]$.

1. Montrer que $\mathrm{R}_p = \{\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rg}\ \mathrm{A} \geqslant p\}$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $\Gamma_p = \{\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rg}\ \mathrm{A} = p\}$.

Exercice 13 (***)

Montrer qu'une somme de fermés n'est pas nécessairement fermée.

Exercice 14 (***)

Soient A et B deux fermés disjoints de E un $\mathbb{K}$-evn.

1. Trouver $f \in \mathscr{C}(\mathrm{E},\mathbb{R})$ tel que $f_{|\mathrm{A}} = 0$ et $f_{|\mathrm{B}} = 1$.
2. En déduire qu'il existe des ouverts U et V disjoints tels que $\mathrm{A} \subset \mathrm{U}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{V}$.

Exercice 15 (***)

1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{D}_n^s(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs propres simples est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
2. En déduire une nouvelle démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.