Feuille d'exercices n°30

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On pose $\mathcal{O} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \mid \mathrm{P}(0) \neq 0\}$ et on note

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}_1(\mathrm{P}) = \operatorname*{Sup}_{t \in [\,0\,;1\,]} |\mathrm{P}(t)| \qquad \mathrm{N}_2(\mathrm{P}) = \operatorname*{Sup}_{t \in [\,1\,;2\,]} |\mathrm{P}(t)|$$

Déterminer la nature topologique de $\mathcal{O}$ pour les normes N_1 et N_2.

Indications : Étudier la continuer de l'application $\mathrm{P} \in \mathrm{E} \mapsto \mathrm{P}(0)$ puis considérer une suite simple à valeurs dans $\mathrm{E} \smallsetminus \mathcal{O}$ pour discuter selon la norme N_1. Considérer la suite $(\mathrm{P}_n)_n$ avec $\mathrm{P}_n = (1 - \mathrm{X}/2)^n$ et $(1 - \mathrm{P}_n)_n$ pour discuter selon la norme N_2.

Exercice 2 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et $\mathrm{A} = \left\{ f \in \mathrm{E} \mid f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1 \right\}$.

1. Montrer que A est une partie fermée de E.
2. Montrer que $\qquad \forall f \in \mathrm{A} \qquad \|f\|_\infty > 1$
3. Calculer $\mathrm{d}(0, \mathrm{A})$.

Indications : 1. Écrire A comme intersection d'images réciproques.
2. Procéder par l'absurde.
3. Considérer la fonction continue f_n définie par $f_n(t) = n^2 t/(n-1)$ pour $t \in \left[0\,; \frac{1}{n}\right]$ et constante sur $\left[\frac{1}{n}\,; 1\right]$.

Exercice 3 (***)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-evn et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue
(ii) $\forall \mathrm{A} \subset \mathrm{E} \qquad f(\bar{\mathrm{A}}) \subset \overline{f(\mathrm{A})}$
(iii) $\forall \mathrm{B} \subset \mathrm{F} \qquad \overline{f^{-1}(\mathrm{B})} \subset f^{-1}(\overline{\mathrm{B}})$
(iv) $\forall \mathrm{B} \subset \mathrm{F} \qquad f^{-1}(\mathring{\mathrm{B}}) \subset (f^{-1}(\mathrm{B}))^\circ$

Indications : Montrer le cycle d'implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i). Exploiter la caractérisation séquentielle pour (i) $\Longrightarrow$ (ii). Considérer $f^{-1}(\mathrm{B}(f(x_0), \varepsilon))$ avec $x_0 \in \mathrm{E}$ et $\varepsilon > 0$ pour (iv) $\Longrightarrow$ (i).

Exercice 4 (***)

Soit n entier non nul et Ω_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindé à racines simples. Montrer que Ω_n est un ouvert.

Indications : Pour $P \in \Omega_n$, notant $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ les racines de P, considérer $\beta_0, \ldots, \beta_n$ tels que $\beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \ldots < \alpha_n < \beta_n$ puis $f : Q \mapsto (Q(\beta_0), \ldots, Q(\beta_n))$ et remarquer que f linéaire sur un espace de dimension finie.

Exercice 5 (***)

Soit $E = \left\{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n| \text{ converge}\right\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ pour $u \in E$ et $\varphi \in \mathscr{L}_c(E, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique $(y_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bornée tel que $\varphi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n y_n$ pour tout $u \in E$.

Indications : Procéder par analyse synthèse en utilisant les suites $\delta_k = (\delta_{k,n})_n$ pour k entier. Lors de la synthèse, exploiter une caractérisation de la continuité de φ.

Exercice 6 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et A une partie non vide bornée de E. On note $\delta(A) = \operatorname{Sup}_{(x,y)\in A^2} \|x - y\|$. Montrer

$$\delta(A) = \delta(\bar{A}) = \delta(\partial A)$$

Indications : Montrer que $\bar{A}$ est bornée puis $\delta(A) = \delta(\bar{A})$ par double inégalité. Pour $\delta(\bar{A}) \leqslant \delta(A)$, utiliser une caractérisation séquentielle des points adhérents. Puis, pour a, b distincts dans A, considérer $\varphi : t \mapsto a + t(b - a)$ et $I = \{t \in R \mid \varphi(t) \in A\}$. Montrer que I est une partie non vide, bornée de $\mathbb{R}$ puis, notant $t_0 = \operatorname{Inf} I$ et $t_1 = \operatorname{Sup} I$, établir que $\varphi(t_0)$ et $\varphi(t_1)$ sont sur la frontière. Conclure.

Exercice 7 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn. Montrer que les seules parties ouvertes et fermées de E sont $\varnothing$ et E lui-même.

Indications : Considérer A une partie ouverte et fermée non vide de E et différente de E puis pour $a \in A$ et $b \notin A$, étudier l'ensemble I défini par

$$I = \{t \in [\,0\,;1\,] \mid \varphi(t) \in A\}$$

avec $\varphi(t) = a + t(b - 1)$ pour t réel.