ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Programme de colles

⚠ Venir avec un cahier de colles : y coller les énoncés des exercices et les reprendre à l'issue de la colle.

Semaine 8 **18/11/24 - 22/11/24**

Programme :

Topologie, continuité :

— Boule ouverte, fermée, sphère, convexité des boules, ouvert, union d'ouverts, intersection finie d'ouverts, fermé, intersection de fermés, union finie de fermés, voisinage, point intérieur, intérieur, caractérisation d'un ouvert avec son intérieur, l'intérieur comme plus grand ouvert inclus dans l'ensemble, point adhérent, adhérence, partie dense, caractérisation séquentielle des points adhérents, caractérisation métrique des points adhérents, caractérisation d'un fermé avec son adhérence, caractérisation séquentielle d'un fermé, fermeture des sev en dimension finie, l'adhérence comme plus petit fermé contenant l'ensemble, frontière, invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente, cas de la dimension finie, topologie relative ;

— Limite d'une fonction en un point adhérent, extension au cas $\|x\| \to +\infty$ et $x \to \pm\infty$ (dans une partie de $\mathbb{R}$ non majorée ou non minorée), caractérisation séquentielle, caractérisation en dimension finie ou dans un espace produit, opérations algébriques sur les limites ;

— continuité, caractérisation séquentielle, caractérisation en dimension finie ou dans un espace produit, image réciproque d'un ouvert (respectivement fermé) par une application continue, coïncidence de deux fonctions sur une partie dense, uniforme continuité, fonction lipschitzienne, l'application $x \mapsto \mathrm{d}(x, \mathrm{A})$ est 1-lipschitzienne, opérations algébriques sur les fonctions continues, fonctions polynomiales et fonctions rationnelles ;

— Une application linéaire est continue si et seulement si elle est lispchitzienne en 0, continuité des applications linéaires définies sur un espace de dimension finie, extension aux applications n-linéaires, norme d'opérateur, caractère sous-multiplicatif ;

— Compacité, les compacts sont fermés bornés, fermé dans un compact, suite dans un compact avec une unique valeur d'adhérence, produit fini de compacts, image d'un compact par une application continue, théorème des bornes atteintes, théorème de Heine, description des compacts en dimension finie, suite bornée avec une unique valeur d'adhérence en dimension finie ;

— Chemin continu reliant deux points, composantes connexes par arcs, connexité par arcs, cas des ensembles convexes, partie étoilée, image directe d'une partie connexe par arcs par une application continue, les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.

Questions de cours : (avec preuve)

1. Image réciproque d'un ouvert (respectivement fermé) par une application continue ;
2. Fermeture de $\mathbb{Z}$ (trois méthodes) ;
3. L'application $x \mapsto \mathrm{d}(x, \mathrm{A})$ est 1-lipschitzienne.
4. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
5. Une application linéaire est continue si et seulement si elle est lipschitzienne en zéro, cas où l'espace de départ est de dimension finie ;
6. Exemple d'application linéaire discontinue en dimension infinie ;
7. Un compact est fermé borné ;
8. Un produit fini de compacts est compact ;
9. L'image d'un compact par une application continue est compact ;
10. Théorème des bornes atteintes ;
11. Théorème de Heine ;
12. Description des compacts en dimension finie ;
13. Compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$;
14. La relation par un chemin continu est une relation d'équivalence ;
15. Une partie convexe est connexe par arcs.
16. Une partie étoilée est connexe par arcs.