ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°22

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (*)

Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Corrigé : 1. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à I_3 donc égale à I_3 ce qui n'est pas le cas donc

$$\boxed{\text{La matrice A n'est pas diagonalisable.}}$$

2. La matrice $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet 3 valeurs propres distinctes donc par condition suffisante

$$\boxed{\text{La matrice B est diagonalisble.}}$$

3. On a
$$\mathrm{Sp}\,(\mathrm{C}) = \{0, 1\} \quad \text{avec} \quad m_0(\mathrm{C}) = 1,\ m_1(\mathrm{C}) = 2$$

Puis
$$\mathrm{C} - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{rg}\,(\mathrm{C} - \mathrm{I}_3) = 1$$

Le théorème du rang donne

$$\dim \mathrm{E}_1(\mathrm{C}) = \dim \mathrm{Ker}\,(\mathrm{C} - \mathrm{I}_3) = 3 - \mathrm{rg}\,(\mathrm{C} - \mathrm{I}_3) = 2 = m_1(\mathrm{C})$$

et
$$1 \leqslant \dim \mathrm{E}_0(\mathrm{C}) \leqslant m_0(\mathrm{C}) = 1$$

D'après le théorème fondamental de diagonalisation, on conclut

$$\boxed{\text{La matrice C est diagonalisable.}}$$

4. On a
$$\mathrm{Sp}\,(\mathrm{D}) = \{0, 1\} \quad \text{avec} \quad m_0(\mathrm{D}) = 2,\ m_1(\mathrm{D}) = 1$$

On a clairement $\mathrm{rg}\ \mathrm{D} = 2$ d'où $\dim \mathrm{E}_0(\mathrm{D}) = \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{D} = 1 \neq m_0(\mathrm{D})$. On conclut

$$\boxed{\text{La matrice D n'est pas diagonalisable.}}$$

Exercice 2 (*)

Les matrices suivantes sont-elles trigonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? diagonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, préciser la matrice de passage de la base canonique vers une base de vecteurs propres.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Corrigé : Avec successivement $\mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2$, on a

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ -1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 0 & -1 & X-1 \end{vmatrix}$$

Ainsi
$$\chi_A = (X+1)X(X-2)$$

La matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet 3 valeurs propres distinctes donc est diagonalisable et *a fortiori* trigonalisable. On cherche ensuite des bases des sous-espaces propres. On a

$$AX = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = x(1, 0, -1)$$

$$(A + I_3)X = 0 \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = x(1, -1, 0)$$

$$(A - 2I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -2x + y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = x(1, 2, 3)$$

Ainsi
$$\boxed{P^{-1}AP = \operatorname{diag}(0, -1, 2) \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

En développant selon la première colonne,

$$\chi_B = \begin{vmatrix} X & 0 & -1 \\ -2 & X & -1 \\ 0 & -2 & X \end{vmatrix} = X(X^2 - 2) - 4 = X^3 - 2X - 4 = (X-2)(X^2 + 2X + 2)$$

Le polynôme caractéristique χ_B n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ d'où

$$\boxed{\text{La matrice B n'est pas trigonalisable dans } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

On a

$$\chi_C = \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 0 \\ -2 & X-4 & 0 \\ 4 & -2 & X-5 \end{vmatrix} = (X-5)\left[(X-1)(X-4) - 4\right] = X(X-5)^2$$

On a $\quad (C - 5I_3)X = 0 \iff 2x - y = 0 \iff (x, y, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 0, 1)$

On a $\dim E_5(C) = m_5(C)$ et $\dim E_0(C) = m_0(C)$ (car multiplicité égale à 1) avec χ_C scindé sur $\mathbb{R}$ ce qui prouve que la matrice C est diagonalisable. Puis

$$CX = 0 \iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -4x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = y(2, 1, 2)$$

Ainsi
$$\boxed{P^{-1}CP = \operatorname{diag}(5, 5, 0) \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

Avec successivement $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient

$$\chi_D = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -1 & X-2 & 1 \\ 1 & -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & X-2 & -1 \\ 1 & -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & X-2 & -1 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix}$$

d'où
$$\chi_{\mathrm{D}} = (\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}-2)$$

On a
$$(\mathrm{D}-\mathrm{I}_3)\mathrm{X} = 0 \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff (x,y,z) = x(1,0,1)$$

On en déduit $\dim \mathrm{E}_1(\mathrm{D}) = 1 < 2 = m_1(\mathrm{D})$. Comme χ_{D} est scindé sur $\mathbb{R}$, on conclut

$$\boxed{\text{La matrice D est trigonalisable mais non diagonalisable dans } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

Exercice 3 (*)

Montrer que la matrice J de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de 1 est diagonalisable et préciser une matrice de passage associée.

Corrigé : Notons $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{U}^\top = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. On a clairement $\operatorname{rg} \mathrm{J} = 1$ et $\operatorname{Im} \mathrm{J} = \operatorname{Vect}(\mathrm{U})$. Par suite, on a $0 \in \operatorname{Sp}(\mathrm{J})$ et $\dim \mathrm{E}_0(\mathrm{J}) = n-1$. Puis $\mathrm{JU} = n\mathrm{U}$ donc $n \in \operatorname{Sp}(\mathrm{J})$. Or, comme $\mathrm{E}_0(\mathrm{J})$ et $\mathrm{E}_n(\mathrm{J})$ sont en somme directe, on a

$$\dim \mathrm{E} \geqslant \dim \mathrm{E}_0(\mathrm{J}) \oplus \mathrm{E}_n(\mathrm{J}) = \dim \mathrm{E}_0(\mathrm{J}) + \dim \mathrm{E}_n(\mathrm{J}) \geqslant n-1+1 = n = \dim \mathrm{E}$$

Par suite
$$\mathrm{E}_0(\mathrm{J}) \oplus \mathrm{E}_n(\mathrm{J}) = \mathrm{E}$$

Ainsi
$$\boxed{\text{La matrice J est diagonalisable.}}$$

Clairement, la famille (U) est une base de la droite vectorielle $\mathrm{E}_n(\mathrm{J})$. Puis

$$\mathrm{X} \in \operatorname{Ker} \mathrm{J} \iff \sum_{i=1}^n x_i = 0 \iff x_1 = \sum_{i=2}^n x_i$$

Ainsi
$$\text{La famille } (-e_1 + e_i)_{i \in [\![2\,;\,n]\!]} \text{ est une base de Ker J.}$$

Par suite, une matrice de passage pour diagonaliser J est donnée par

$$\boxed{\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -1 & \dots & \dots & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Variantes : (a) On a (voir exemple du cours de Réduction)
$$\chi_{\mathrm{J}} = (\mathrm{X}-n)\mathrm{X}^{n-1}$$

Par suite
$$m_n(\mathrm{A}) = \dim \mathrm{E}_n(\mathrm{A}) \quad \text{et} \quad m_0(\mathrm{A}) = \dim \mathrm{E}_0(\mathrm{A})$$

et χ_{J} scindé dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On conclut que J est diagonalisable.

(b) Le calcul donne $\mathrm{J}^2 = n\mathrm{J}$ donc $\mathrm{P} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-n)$ est annulateur de J et P scindé à racines simples donc J est diagonalisable.

Exercice 4 (**)

Soit $n \geqslant 2$.

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\operatorname{rg} \mathrm{A} = 1$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
2. Existe-t-il une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices diagonalisables ?

Corrigé : 1. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé. Dans une base obtenue par complétion de $\operatorname{Ker} u$, on a $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} 0_{n-1} & * \\ \hline 0 & \alpha \end{array}\right)$ avec $\alpha = \operatorname{Tr} u = \operatorname{Tr} \mathrm{A}$. Si $\operatorname{Tr} \mathrm{A} = 0$, alors $\operatorname{Sp}(\mathrm{A}) = \{0\}$ et A n'est pas nulle donc pas semblable à la matrice nulle donc pas diagonalisable (ou aussi $m_0(\mathrm{A}) = n > n-1 = \dim \mathrm{E}_0(\mathrm{A})$). Si $\operatorname{Tr} \mathrm{A} \neq 0$, on a

$$\dim \mathrm{E}_0(\mathrm{A}) = n-1 \quad \text{et} \quad \dim \mathrm{E}_{\operatorname{Tr} \mathrm{A}}(\mathrm{A}) \geqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{K}^n = \mathrm{E}_0(\mathrm{A}) \oplus \mathrm{E}_{\operatorname{Tr} \mathrm{A}}(\mathrm{A})$$

ou aussi

$$m_{\operatorname{Tr} \mathrm{A}}(\mathrm{A}) = 1 = \dim \mathrm{E}_{\operatorname{Tr} \mathrm{A}}(\mathrm{A}) \qquad m_0(\mathrm{A}) = n-1 = \dim \mathrm{E}_0(\mathrm{A}) \quad \text{et} \quad \chi_{\mathrm{A}} \text{ scindé sur } \mathbb{K}[\mathrm{X}]$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{A} \text{ diagonalisable} \iff \operatorname{Tr}(\mathrm{A}) \neq 0}$

Remarque : On a $\mathrm{X}^{n-1} | \chi_{\mathrm{A}}$ d'où $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} - \operatorname{Tr} \mathrm{A})$. On peut conclure comme précédemment.

Variante : Il existe une colonne X de A non nulle. Toutes les autres colonnes sont colinéaires à celle-ci d'où $\mathrm{A} = \mathrm{X}\mathrm{Y}^\top$ avec $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a $\mathrm{A} = \big(x_i y_j\big)$. Puis $\mathrm{A}^2 = \mathrm{X}(\mathrm{Y}^\top \mathrm{X})\mathrm{Y}^\top = (\operatorname{Tr} \mathrm{A})\mathrm{A}$. Ainsi, le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - (\operatorname{Tr} \mathrm{A})\mathrm{X}$ est annulateur de A. Comme A n'est pas une homothétie, on en déduit que $\pi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}(\mathrm{X} - \operatorname{Tr} \mathrm{A})$. La matrice A est diagonalisable si et seulement si π_{A} est scindé à racines simples d'où

$$\boxed{\mathrm{A} \text{ diagonalisable} \iff \operatorname{Tr} \mathrm{A} \neq 0}$$

2. La famille $\mathscr{L} = (\mathrm{E}_{i,j} + \mathrm{E}_{j,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est constituée de matrices de rang 1 de trace non nulle, est génératrice et de cardinal égal à n^2. En effet, notant $\mathrm{F} = \operatorname{Vect}(\mathscr{L})$, on a

$$\forall (i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2 \qquad \mathrm{E}_{j,j} = \frac{1}{2} 2\mathrm{E}_{j,j} \in \mathrm{F} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_{i,j} = (\mathrm{E}_{i,j} + \mathrm{E}_{j,j}) - \mathrm{E}_{j,j} \in \mathrm{F}$$

ce qui prouve $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{F}$ et $\mathrm{F} \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ d'où l'égalité. D'après le résultat de la question précédente, on conclut

$$\boxed{\text{Il existe une base de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ formée de matrices diagonalisables.}}$$

Exercice 5 (**)

Diagonaliser la matrice $\mathrm{A} = \big(a_{i,j}\big) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 2$ et

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ ou } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Corrigé : On a
$$\chi_{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \mathrm{X}-1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & \mathrm{X} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & \mathrm{X} \end{vmatrix}$$

On réalise l'opération $\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \dfrac{1}{\mathrm{X}}\sum\limits_{k=2}^{n} \mathrm{L}_k$ et on obtient

$$\chi_{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \mathrm{X}-1-\dfrac{n-1}{\mathrm{X}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & \mathrm{X}-1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & \mathrm{X}-1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\mathrm{X}-1-\frac{n-1}{\mathrm{X}}\right)\mathrm{X}^{n-1} = (\mathrm{X}^2-\mathrm{X}-n+1)\mathrm{X}^{n-2}$$

On conclut

$$\boxed{\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^{n-2}(\mathrm{X}^2-\mathrm{X}-n+1) \quad \text{et} \quad \mathrm{A} \text{ semblable à } \mathrm{diag}\left(\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}, \frac{1-\sqrt{4n-3}}{2}, 0, \dots, 0\right)}$$

Remarque : On peut préciser une base de vecteurs propres. On a

$$\mathrm{AX} = 0 \iff x_1 = 0, \sum_{i=2}^{n} x_i = 0 \iff \mathrm{X} = \sum_{i=3}^{n} -x_i(e_2 - e_i)$$

d'où une base de $\mathrm{E}_0(\mathrm{A})$. Puis, pour $\lambda \neq 0$, il vient

$$\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X} \iff \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \lambda x_1 \\ \forall i \in [\![2\,;\, n]\!] \qquad x_1 = \lambda x_i \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} \dfrac{x_1}{\lambda} = \lambda x_1 \\ \forall i \in [\![2\,;\, n]\!] \qquad x_i = \dfrac{x_1}{\lambda} \end{cases}$$

$$\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X} \iff \begin{cases} x_1(\lambda^2-\lambda-n+1) = 0 \\ \forall i \in [\![2\,;\, n]\!] \qquad x_i = \dfrac{x_1}{\lambda} \end{cases}$$

Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \setminus \{0\}$, les vecteurs de la forme $(\lambda, 1, \dots, 1)$ constituent des bases de $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$. Notant λ_1, λ_2 les valeurs propres non nulles de A et

$$\mathrm{P} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\mathscr{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a $$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0 \dots, 0)$$

Exercice 6 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ diagonalisable. On note $(p_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)}$ la famille de projecteurs associés à la somme directe $\mathrm{E} = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$. Montrer

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \qquad p_\lambda \in \mathbb{K}[u]$$

Corrigé : On note $(\mathrm{L}_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)}$ la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associée à $\mathrm{Sp}\,(u)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$. On a $\mathrm{L}_\lambda(\mu) = \delta_{\mu,\lambda}$ pour $\mu \in \mathrm{Sp}\,(u)$. Avec la propriété $\mathrm{P}(u)(x) = \mathrm{P}(\mu)x$ pour $x \in \mathrm{E}_\mu(u)$, on trouve

$$\forall x \in \mathrm{E}_\lambda(u) \qquad \mathrm{L}_\lambda(u)(x) = \mathrm{L}_\lambda(\lambda)x = x$$

et $$\forall x \in \sum_{\mu\in\mathrm{Sp}\,(u)\smallsetminus\{\lambda\}} u_\mu \in \bigoplus_{\mu\in\mathrm{Sp}\,(u)\smallsetminus\{\lambda\}} \mathrm{E}_\mu(u) \qquad \mathrm{L}_\lambda(u)(x) = \sum_{\mu\in\mathrm{Sp}\,(u)\smallsetminus\{\lambda\}} \mathrm{L}_\lambda(\mu)x_\mu = 0$$

Autrement dit $$\mathrm{L}_\lambda(u) = p_\lambda$$

On conclut $$\boxed{\forall\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \qquad p_\lambda \in \mathbb{K}[u]}$$

Exercice 7 (**)

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{M}^2 - \mathrm{M}^\top = \mathrm{I}_n$. Montrer que M est diagonalisable.

Corrigé : On transpose la relation d'origine et on trouve

$$\left(\mathrm{M}^\top\right)^2 - \mathrm{M} = \mathrm{I}_n$$

En injectant l'expression de $\mathrm{M}^\top = \mathrm{M}^2 - \mathrm{I}_n$, il vient

$$\left(\mathrm{M}^2 - \mathrm{I}_n\right)^2 - \mathrm{M} - \mathrm{I}_n = 0 \iff \mathrm{M}^4 - 2\mathrm{M}^2 - \mathrm{M} = 0$$

Le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^2 - \mathrm{X}$ est annulateur de M. Or, on a

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-\alpha)(\mathrm{X}-\beta) \quad \text{avec} \quad \alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Comme P est scindé à racines simples, on conclut par théorème que

$$\boxed{\text{La matrice M est diagonalisable.}}$$

Exercice 8 (**)

Soit A matrice compagne de $(u_n)_n \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ suite récurrente linéaire d'ordre $p \geqslant 2$. Résoudre $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$ avec $\mathrm{X}^\top = \begin{pmatrix} x_0 & \ldots x_{p-1} \end{pmatrix}$ non nulle. En déduire la forme des sous-espaces propres de A et une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de A.

Corrigé : On a $$u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \ldots + a_0 u_n$$

avec a_i des scalaires et $a_0 \neq 0$. On rappelle

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{X}_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_0 & \ldots & \ldots & \ldots & a_{p-1} \end{pmatrix}}_{=\mathrm{A}} \times \mathrm{X}_n = \mathrm{AX}_n$$

On note $\mathrm{P} = \mathrm{X}^p - \sum\limits_{i=0}^{p-1} a_i \mathrm{X}^i$. On a

$$\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X} \iff \begin{cases} x_1 = \lambda x_0 \\ \vdots \\ x_{p-1} = \lambda x_{p-2} \\ a_0 x_0 + \ldots a_{p-1} x_{p-1} = \lambda x_{p-1} \end{cases} \iff \begin{cases} (x_0, \ldots, x_{p-1}) = x_0(1, \lambda, \ldots, \lambda^{p-1}) \\ x_0 \mathrm{P}(\lambda) = 0 \end{cases}$$

On remarque en particulier que $\mathrm{X} \neq 0 \iff x_0 \neq 0$. La dernière équation indique donc λ racine de P. Par ailleurs, les sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Si la matrice A est diagonalisable, alors on a $\dim \mathbb{K}^p = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) = \mathrm{Card}\ \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$ ce qui prouve que A admet p valeurs propres distinctes et la réciproque étant immédiate, on conclut

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \qquad \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}\,(1, \lambda, \ldots, \lambda^{p-1}) \\ \text{A diagonalisable} \iff \text{A admet } p \text{ valeurs propres distinctes.} \end{array}}$$

Exercice 9 (*)

Les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes sont-elles semblables :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Corrigé : On trouve $$\chi_\mathrm{A} = \chi_\mathrm{B} = (\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X} - 2)^2$$

Clairement $$\mathrm{rg}\,(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3) = 1 \implies \dim \mathrm{E}_2(\mathrm{A}) = 2 = m_2(\mathrm{A})$$

Donc la matrice A est diagonalisable. Ensuite

$$\mathrm{B} - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Les deux premières colonnes étant échelonnées non nulles, on a $\mathrm{rg}\,(\mathrm{B} - 2\mathrm{I}_3) \geqslant 2$ (donc égal à 2) et par suite, la matrice B n'est pas diagonalisable et on conclut que

$$\boxed{\text{Les matrices A et B ne sont pas semblables.}}$$

Exercice 10 (**)

Soit n entier non nul, $a_0, \ldots a_{n-1}$ des complexes et

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ldots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ldots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer J^k pour $k \in [\![0 \,;\, n]\!]$.
2. Montrer que la matrice J est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et préciser son spectre.
3. En déduire $\det \mathrm{A}$.

Corrigé : 1. On voit aisément que J^k est la matrice dont les colonnes ont été permutées de manière cyclique k fois vers la droite. Pour le démontrer, notons M_σ avec $\sigma \in \mathrm{S}_n$ la *matrice de permutation* définie par

$$\mathrm{M}_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

Soit $(\sigma, \gamma) \in \mathrm{S}_n^2$. On a

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad (\mathrm{M}_\sigma \times \mathrm{M}_\gamma)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)} \delta_{k,\gamma(j)} = \delta_{i,\sigma(\gamma(j))} = \delta_{i,\sigma\circ\gamma(j)}$$

Soit c le cycle $c = \begin{pmatrix} n & n-1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{J} = \mathrm{M}_c$ et par une récurrence immédiate

$$\boxed{\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \mathrm{J}^k = \mathrm{M}_{c^k}}$$

Remarque : En particulier, on a $c^n = \mathrm{id}$ et $\mathrm{J}^n = \mathrm{I}_n$.

2. La matrice J est une matrice compagne mais simplement en développant selon la dernière ligne, on trouve

$$\chi_{\mathrm{J}} = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & \mathrm{X} \end{vmatrix} = \mathrm{X}^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{X} - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)$$

Ainsi, la matrice J de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ admet n valeurs propres distinctes et par condition suffisante, on conclut

$$\boxed{\text{La matrice J est diagonalisable.}}$$

3. On observe
$$\mathrm{A} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{J}^k$$

Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{J}\mathrm{P} = \mathrm{diag}(\omega^0, \omega^1, \ldots, \omega^{n-1})$ avec $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$. Il vient

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{D}^k = \mathrm{diag}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{0\times k}, \ldots, \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{(n-1)k}\right)$$

On conclut
$$\boxed{\det \mathrm{A} = \prod_{\ell=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{\ell k}}$$

Remarque : La matrice A est appelée *matrice circulante* et son déterminant est dit *circulant.*

Exercice 11 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ diagonalisable. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\exists x \in \mathrm{E} \quad | \quad (x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ base de E ;
2. les valeurs de propres de f sont simples ;
3. $(\mathrm{id}\,, f, \ldots, f^{n-1})$ base de $\mathbb{K}[f]$.

Corrigé : Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Comme $\mathrm{P}(f)(e_i) = \mathrm{P}(\lambda_i) e_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ et pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad f^k(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i^k e_i$$

Notons $\mathscr{L}_x = (x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$. On a

$$\det \operatorname{mat}_{\mathscr{B}} \mathscr{L}_x = \begin{vmatrix} x_1 & x_1\lambda_1 & \ldots & x_1\lambda_1^{n-1} \\ x_2 & x_2\lambda_2 & \ldots & x_2\lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n\lambda_n & \ldots & x_n\lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Par linéarité sur chaque ligne, on peut factoriser $\prod_{i=1}^{n} x_i$ et on trouve

$$\boxed{\det \operatorname{mat}_{\mathscr{B}} \mathscr{L}_x = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right) \left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \right)}$$

Supposons (1). Ainsi, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que

$$\det \operatorname{mat}_{\mathscr{B}} \mathscr{L}_x \neq 0 \iff \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right) \left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \right) \neq 0$$

Le produit résultant du déterminant de Vandermonde étant non nul, il s'ensuit clairement que les λ_i sont deux à deux distincts ce qui prouve (2). Supposons ensuite (2). Il suffit de choisir $x \in \mathrm{E}$ tel que $\det \operatorname{mat}_{\mathscr{B}} \mathscr{L}_x \neq 0$. Le choix $x = \sum_{i=1}^{n} e_i$ convient clairement puisqu'on a

$$\det \operatorname{mat}_{\mathscr{B}} \mathscr{L}_x = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

ce qui caractérise que la famille $\mathscr{L}_x$ est une base de E. Comme f est diagonalisable, on a π_f scindé à racines simples et par conséquent

$$\text{les valeurs propres de } f \text{ sont simples} \iff \deg \pi_f = n$$

La famille $(\mathrm{id}\,, f, \ldots, f^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[f]$ avec $d = \deg \pi_f$ et on en déduit que (3) équivaut à $\deg \pi_f = n$ d'où

$$\boxed{\text{Les assertions (1), (2) et (3) sont équivalentes.}}$$

Exercice 12 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et u, v dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, diagonalisables et tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer qu'il existe une base de diagonalisation pour u et v.

Corrigé : On a $\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$, comme u et v commutent, alors $\mathrm{E}_\lambda(u)$ est stable par v. Notons v_λ l'endomorphisme induit par v sur $\mathrm{E}_\lambda(u)$. On a v_λ diagonalisable car induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable. Ainsi, on peut trouver $\mathscr{B}_\lambda$ une base de $\mathrm{E}_\lambda(u)$ qui soit base de diagonalisation de v_λ. Mais cette base est également constituée de vecteurs propres de u (associés à λ). Ainsi, en concaténant $\mathscr{B} = \biguplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathscr{B}_\lambda$, on obtient une base de diagonalisation simultanée de u et v et on conclut

$$\boxed{\text{Il existe une base de diagonalisation pour } u \text{ et } v.}$$

Exercice 13 (**)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et u, v dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ diagonalisables tels que $u^5 = v^5$. Montrer que $u = v$.

Corrigé : Avec $\mathrm{P} = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u^5)} \sqrt[5]{\lambda}\mathrm{L}_\lambda$ où $(\mathrm{L}_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u^5)}$ désigne la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associée à $\mathrm{Sp}\,(u^5)$. On a donc

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u^5) \qquad \mathrm{P}(\lambda) = \sqrt[5]{\lambda}$$

Dans $\mathscr{B}$ une base de diagonalisation de u, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u^5 = \mathrm{diag}_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)}(\lambda^5 \mathrm{I}_{m_\lambda})$ puis

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} \mathrm{P}(u^3) = \mathrm{diag}_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)}(\lambda \mathrm{I}_{m_\lambda}) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$$

d'où $u = \mathrm{P}(u^5)$. De même, on a $v = \mathrm{P}(v^5)$ et comme $u^5 = v^5$, on conclut

$$\boxed{u = v}$$