

Feuille d'exercices n°23

Dans ce qui suit, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Exercice 1 (***)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

1. Interpréter A comme matrice d'un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire que A est diagonalisable.

Corrigé : 1. On décompose

$$A = U + V \quad \text{avec} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ n & \ddots & & & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

On note u et v endomorphismes de E tels que $U = \text{mat}_{\mathcal{C}} u$ et $V = \text{mat}_{\mathcal{C}} v$ avec $\mathcal{C} = (1, X, \dots, X^n)$.
On a avec évaluation paresseuse pour rester à valeurs dans E

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad u(X^k) = kX^{k-1} \quad \text{et} \quad v(X^k) = (n-k)X^{k+1} = nX \cdot X^k - X^2 \times kX^{k-1}$$

Par combinaison linéaire, il s'ensuit

$$\forall P \in E \quad u(P) = P' \quad \text{et} \quad g(P) = nXP - X^2P'$$

Ainsi

$$\boxed{A = \text{mat}_{\mathcal{C}} \varphi \quad \text{avec} \quad \forall P \in E \quad \varphi(P) = (1 - X^2)P' + nXP}$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in E$. On a

$$\varphi(P) = \lambda P \iff (1 - X^2)P' + (nX - \lambda)P = 0$$

Considérons l'équation différentielle homogène associée sur $I =]1; +\infty[$

$$(1 - t^2)x' + (nt - \lambda)x = 0 \tag{H}$$

L'ensemble des solutions est $S_H = \text{Vect}(f)$ avec $f : t \mapsto \exp\left(\int^t \frac{ns - \lambda}{s^2 - 1} ds\right)$. Par décomposition en éléments simples, on trouve

$$\int^t \frac{ns - \lambda}{s^2 - 1} ds = \int^t \left[\frac{\alpha}{s-1} + \frac{\beta}{s+1} \right] ds \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{n-\lambda}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\lambda+n}{2}$$

D'où

$$f = t \in I \mapsto (t-1)^\alpha (1+t)^\beta$$

On cherche des solutions polynomiales. Notons $\alpha = k$ entier, on a $\lambda = n - 2k$ et $\beta = n - k$. On veut β entier également d'où, notant $P_k = (X - 1)^k(X + 1)^{n-k}$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad (1 - X^2)P'_k + (nX - n + 2k)P_k = 0 \iff \varphi(P_k) = (n - 2k)P_k$$

Les P_k ne sont pas nuls (de degré égal à n) donc sont vecteurs propres, associés à des valeurs propres distinctes ($k \mapsto n - 2k$ injective) et constituent par conséquent une famille libre de cardinal égal à $\dim E$ donc une base de diagonalisation de φ . Ainsi

La matrice A est diagonalisable.

Exercice 2 (***)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A \in E$ et on pose $\varphi(M) = AM$ pour tout $M \in E$.

1. Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer A diagonalisable $\iff \varphi$ diagonalisable
3. Si A diagonalisable, déterminer une base de vecteurs propres de φ .

Corrigé : 1. On a φ à valeurs dans E et linéaire par linéarité du produit matriciel à droite. Ainsi

$$\varphi \in \mathcal{L}(E)$$

2. Soit $M \in E$. Par récurrence immédiate, on a $\varphi^k(M) = A^k M$ pour tout k entier et par conséquent, par combinaison linéaire

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad P(\varphi)(M) = P(A)M$$

Par suite P annulateur de $\varphi \iff P$ annulateur de M

Les idéaux de polynômes annulateurs coïncident pour φ et A . On en déduit que $\pi_\varphi = \pi_A$ et par conséquent

$$A \text{ diagonalisable} \iff \varphi \text{ diagonalisable}$$

3. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = PDP^{-1}$. On a pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$

$$\varphi(PE_{i,j}) = PDP^{-1}PE_{i,j} = PDE_{i,j} = P\lambda_i E_{i,j} = \lambda_i PE_{i,j}$$

La famille $\mathcal{L} = (PE_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est donc formée de vecteurs propres et on vérifie sans difficulté qu'elle est libre. Comme son cardinal est égal à $n^2 = \dim E$, on conclut

La famille \mathcal{L} est une base de vecteurs propres de φ .

Exercice 3 (***)

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $(u_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{L}(E)$, endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux. Montrer qu'il existe une base commune de diagonalisation.

Corrigé : Soit $(u_{i_1}, \dots, u_{i_p})$ famille génératrice de $\text{Vect}(u_i)_{i \in I}$, sev de $\mathcal{L}(E)$ de dimension finie. Par souci de simplification, on la note abusivement (u_1, \dots, u_p) . On procède ensuite par récurrence sur p . L'initialisation pour $p = 1$ est immédiate. On suppose la propriété vraie au rang $p - 1$ entier non nul. On décompose $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u_p)} E_\lambda(u_p)$ puis on considère les $u_{i,\lambda}$ induit par

u_i sur $E_\lambda(u_p)$ pour $\lambda \in \text{Sp}(u_p)$ et $i \in \llbracket 1; p - 1 \rrbracket$. La famille $(u_{i,\lambda})_{1 \leq i \leq p-1}$ vérifie l'hypothèse de récurrence et par conséquent, il existe \mathcal{B}_λ base de diagonalisation commune à tous les $u_{i,\lambda}$ et

également à l'endomorphisme induit par u_p sur $E_\lambda(u_p)$. La base concaténée $\biguplus_{\lambda \in \text{Sp}(u_p)} \mathcal{B}_\lambda$ est alors une base de diagonalisation simultanée. Ainsi

Il existe une base commune de diagonalisation pour une famille d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux.

Exercice 4 (***)

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie, u, v dans $\mathcal{L}(E)$ avec $u \circ v = v \circ u$ et v nilpotent. Montrer que $\det(u + v) = \det u$.

Corrigé : Si $u \in \text{GL}(E)$, on a $\det(u + v) = \det u \det(\text{id} + u^{-1} \circ v)$ et comme $u^{-1}v$ est nilpotent, on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice soit triangulaire supérieure stricte d'où $\det(\text{id} + u^{-1} \circ v) = \det \text{id} = 1$. Si $u \notin \text{GL}(E)$, alors $\text{Ker } u$ est stable par v d'où un endomorphisme w induit par v sur $\text{Ker } u$. Mais comme v est nilpotent, w l'est aussi donc de noyau non réduit à 0_E et un élément non nul du noyau est dans $\text{Ker}(u + v)$ d'où $\det(u + v) = 0 = \det u$. Ainsi

$$\det(u + v) = \det u$$

Exercice 5 (***)

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. On définit le *commutant* de f par

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$$

1. Justifier que $\mathcal{C}(f)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer : $g \in \mathcal{C}(f) \iff \forall \lambda \in \text{Sp}(f) \quad E_\lambda(f) \text{ stable par } g$
3. Déterminer $\dim \mathcal{C}(f)$.
4. Si les valeurs propres de f sont simples, montrer que $\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f]$.

Corrigé : 1. L'ensemble $\mathcal{C}(f)$ contient $0_{\mathcal{L}(E)}$ et est stable par combinaison linéaire par linéarité de la composition d'où

Le commutant $\mathcal{C}(f)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$.

2. Si $g \in \mathcal{C}(f)$, alors, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(f)$, les endomorphismes g et $f - \lambda \text{id}$ commutent d'où la stabilité de $E_\lambda(f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{id})$ par g . Réciproquement, comme f est diagonalisable,

on a
$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f)$$

Soit $x \in E$. On a $x = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} x_\lambda$ sa décomposition dans la somme directe ci-avant. Pour $\lambda \in \text{Sp}(f)$, on a par stabilité de $E_\lambda(f)$ par g que $g(x_\lambda) \in E_\lambda(f)$. Il s'ensuit

$$f \circ g(x) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} f(g(x_\lambda)) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda g(x_\lambda) = g \left(\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda x_\lambda \right) = g \circ f(x)$$

Ainsi

$$g \in \mathcal{C}(f) \iff \forall \lambda \in \text{Sp}(f) \quad E_\lambda(f) \text{ stable par } g$$

Variante : On note $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ et \mathcal{B}_k une base de $E_{\lambda_k}(f)$ pour $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$. La famille $\mathcal{B} = \biguplus_{k=1}^r \mathcal{B}_k$ est une base de E adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{k=1}^r E_{\lambda_k}(f)$. Si les sev

propres sont stables, alors $\text{mat}_{\mathcal{B}}g = \text{diag}(A_1, \dots, A_r)$. La matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}}g$ commute clairement avec $\text{diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \dots, \lambda_r I_{m_r})$ d'où le résultat.

3. On conserve les notations précédentes. D'après l'équivalence précédente, on obtient

$$g \in \mathcal{C}(f) \iff \text{mat}_{\mathcal{B}}g = \text{diag}(A_1, \dots, A_r)$$

avec $A_k \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{K})$ et $m_k = \dim E_{\lambda_k}(f)$ pour $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$. L'application $g \mapsto \text{mat}_{\mathcal{B}}g$ étant un isomorphisme, on a $\mathcal{C}(f)$ isomorphe à l'ensemble des matrices diagonales par blocs de la forme précédente et par conséquent

$$\dim \mathcal{C}(f) = \sum_{k=1}^r \dim \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{K}) = \sum_{k=1}^r m_k^2$$

Autrement dit

$$\boxed{\dim \mathcal{C}(f) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim E_{\lambda}(f)^2}$$

Variante : Pour $\lambda \in \text{Sp}(f)$, l'endomorphisme g induit sur $E_{\lambda}(f)$ un endomorphisme $g_{\lambda} \in \mathcal{L}(E_{\lambda}(f))$. Considérons l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{C}(f) & \longrightarrow \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \mathcal{L}(E_{\lambda}(f)) \\ g & \longmapsto (g_{\lambda})_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \end{cases}$$

Comme une application est caractérisée par ses restrictions sur les sev d'une décomposition de E en somme directe, il s'ensuit que Φ est injective. Étant donné $(g_{\lambda})_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \in \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \mathcal{L}(E_{\lambda}(f))$,

on pose

$$g : x = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} x_{\lambda} \mapsto \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} g_{\lambda}(x_{\lambda})$$

où l'écriture $x = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} x_{\lambda}$ désigne la décomposition dans $\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_{\lambda}(f)$. L'application g ainsi définie est clairement dans $\mathcal{L}(E)$ et vérifie le critère établi à la question précédente, autrement dit $g \in \mathcal{C}(f)$ ce qui prouve la surjectivité de Φ . Par conséquent, l'application Φ est un isomorphisme et on retrouve

$$\boxed{\dim \mathcal{C}(f) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim \mathcal{L}(E_{\lambda}(f)) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim E_{\lambda}(f)^2}$$

4. Si les valeurs propres simples, on a $\pi_f = \chi_f$ d'où $\dim \mathbb{K}[f] = \dim E$ et $\dim E_{\lambda}(f) = 1$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(f)$ d'où

$$\dim \mathcal{C}(f) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim E_{\lambda}(f) = \dim E = \dim \mathbb{K}[f]$$

et comme on a clairement $\mathbb{K}[f] \subset \mathcal{C}(f)$, on conclut

$$\boxed{\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f]}$$

Remarques : Pour f diagonalisable, on peut faire mieux en montrant

$$f \text{ à valeurs propres simples} \iff \mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f]$$

Il suffit d'observer

$$\dim \mathbb{K}[f] = \deg \pi_f \leq \dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim E_{\lambda}(f) \leq \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim E_{\lambda}(f)^2 = \dim \mathcal{C}(f)$$

et il y a égalité si toutes les inégalités sont des égalités.

Exercice 6 (***)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(A, B) \in E^2$ et on pose $\varphi(M) = AM + MB$ pour tout $M \in E$. Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ puis montrer que si A et B sont diagonalisables, alors φ l'est.

Corrigé : 1. L'application φ est clairement à valeurs dans E et linéaire par linéarité de la somme et bilinéarité du produit matriciel d'où

$$\boxed{\varphi \in \mathcal{L}(E)}$$

2. Il existe P, Q dans $GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PDP^{-1}$ et $B = Q\Delta Q^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ et $\Delta = \text{diag}(\mu_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$. On note $M_{i,j} = PE_{i,j}Q^{-1}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$. Pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, on a

$$\varphi(M_{i,j}) = AM_{i,j} + M_{i,j}B = PDE_{i,j}Q^{-1} + PE_{i,j}\Delta Q^{-1}$$

et

$$DE_{i,j} = \sum_{\ell=1}^n \lambda_\ell \underbrace{E_{\ell,\ell}E_{i,j}}_{\delta_{\ell,i}E_{\ell,j}} = \lambda_i E_{i,j} \quad E_{i,j}\Delta = \sum_{\ell=1}^n \mu_\ell \underbrace{E_{i,j}E_{\ell,\ell}}_{\delta_{j,\ell}E_{i,\ell}} = \mu_j E_{i,j}$$

Ainsi

$$\varphi(M_{i,j}) = \lambda_i PE_{i,j}Q^{-1} + \mu_j PE_{i,j}Q^{-1} = (\lambda_i + \mu_j)M_{i,j}$$

La famille $(M_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2}$ est donc une famille de vecteurs propres de φ et on vérifie sans difficulté qu'elle est libre ce qui prouve qu'il s'agit d'une base de diagonalisation de φ . Ainsi

$$\boxed{A, B \text{ diagonalisables} \implies \varphi \text{ diagonalisable}}$$

Exercice 7 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer

$$A \text{ nilpotente} \iff \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{Tr}(A^k) = 0$$

Corrigé : Le sens direct est immédiat puisque A est trigonalisable et $\text{Sp}(A) = \{0\}$. Réciproquement, supposons $\text{Sp}(A) \neq \{0\}$ et notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres non nulles de A . Par trigonalisation, on a

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^p m_{\lambda_i} \lambda_i^k = 0$$

En particulier

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix}}_{=V} \begin{pmatrix} m_{\lambda_1} \lambda_1 \\ \vdots \\ m_{\lambda_p} \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$\det V = \prod_{1 \leq i < j \leq p} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

ce qui impose $m_{\lambda_i} \lambda_i = 0$ et qui est absurde puisque les λ_i sont valeurs propres donc de multiplicité non nulle et sont supposées non nulles. Par conséquent, on a $\text{Sp}(A) \subset \{0\}$ et comme A est trigonalisable, l'inclusion est une égalité et on obtient la nilpotence de A . Ainsi

$$\boxed{A \text{ nilpotente} \iff \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{Tr}(A^k) = 0}$$

Variante : Supposons $\text{Tr}(A^k) = 0$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On en déduit $\text{Tr}(P(A)) = 0$ pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$ vérifiant $P(0) = 0$. Supposons $\text{Sp}(A) \neq \{0\}$. On considère la famille de polynômes

interpolateur $(L_\lambda)_\lambda$ associés à $\text{Sp}(A) \cup \{0\}$. Le cardinal de cet ensemble est au plus $n + 1$. Les polynômes L_λ sont donc de degré au plus n . Soit $\lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{0\}$. On a $L_\lambda(0) = 0$ d'où $\text{Tr}(L_\lambda(A)) = 0$. Or, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$ d'où

$$\text{Tr}(L_\lambda(A)) = \text{Tr}(L_\lambda(T)) = m_\lambda = 0 \quad \text{avec} \quad m_\lambda \geq 1$$

ce qui est absurde. On en déduit $\text{Sp}(A) \subset \{0\}$ d'où l'égalité puisque le spectre complexe est non vide.

Exercice 8 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline A & A \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Corrigé : Par une récurrence immédiate, on montre que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad B^k = \left(\begin{array}{c|c} A^k & 0 \\ \hline kA^k & A^k \end{array} \right)$$

Il s'ensuit par combinaison linéaire

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad P(B) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & 0 \\ \hline AP'(A) & P(A) \end{array} \right)$$

Si B est diagonalisable, on peut choisir P scindé à racines simples qui annule B . Par conséquent, on a également $P(A) = AP'(A) = 0$. Le polynôme P étant scindé à racines simples, les racines de P' sont distinctes de celles de P d'où $P \wedge XP' = 1$ ou X . Or, on a $\pi_A|P$ et $\pi_A|XP'$ d'où $\pi_A|P \wedge XP'$ et $\deg \pi_A \geq 1$ ce qui prouve $\pi_A = X$ et donc $A = 0$. La réciproque est évidente. On conclut

$$\boxed{\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline A & A \end{array} \right) \text{ diagonalisable} \iff A = 0}$$

Exercice 9 (***)

Pour $n \geq 2$, montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.

Corrigé : Soit H hyperplan de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons $H \cap \text{GL}_n(\mathbb{K}) = \emptyset$. Comme $I_n \notin H$, alors $\text{Vect}(I_n) \oplus H = E$. Soit $M \in E$ nilpotente. Il existe $(A, \lambda) \in H \times \mathbb{K}$ tel que $M = A + \lambda I_n$. Soit $X \in \text{Ker } A$ avec $X \neq 0$, choix possible puisque A n'est pas inversible. On trouve $. Or, le spectre d'une matrice nilpotente est réduit à $\{0\}$ d'où $\lambda = 0$ et par conséquent $M = A \in H$. Ainsi, l'hyperplan contient toutes les matrices nilpotentes. Par stabilité par combinaison linéaire, il contient donc $E_{n,1} + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$, somme de deux matrices triangulaires strictes. Mais cette matrice est inversible ce qui contredit l'hypothèse faite sur H . Par conséquent$

$$\boxed{\text{Tout hyperplan de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ rencontre } \text{GL}_n(\mathbb{K}).}$$

Exercice 10 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline A & 0 \end{array} \right)$.

1. Relier les sous-espaces propres de A et B .

2. Préciser les dimensions des sous-espaces propres de B en fonction de ceux de A.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Corrigé : 1. Soit $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On note $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$. On a

$$BX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} X_2 \\ AX_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} AX_1 = \lambda^2 X_1 \\ X_2 = \lambda X_1 \end{cases}$$

Ainsi

$$\lambda \in \text{Sp}(B) \iff \lambda^2 \in \text{Sp}(A) \quad \text{et} \quad X \in E_\lambda(B) \iff X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \lambda X_1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad X_1 \in E_{\lambda^2}(A)$$

Remarque : On a $\chi_B = \begin{vmatrix} XI_n & -I_n \\ -U & XI_n \end{vmatrix}$. Les opérations $L_k \leftarrow L_k + \frac{1}{X}L_{k+n}$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ donnent

$$\chi_B = \begin{vmatrix} XI_n - \frac{1}{X}U & 0 \\ -U & XI_n \end{vmatrix} = \det(X^2 I_n - U) = \chi_A(X^2)$$

On retrouve le lien précédemment établi sur le spectre.

2. Soit $\lambda \in \text{Sp}(B)$. L'application $X_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \mapsto \begin{pmatrix} X_1 \\ \lambda X_1 \end{pmatrix}$ est injective. Une base de vecteurs propres de $E_{\lambda^2}(A)$ sera donc envoyée sur une famille libre de vecteurs propres de $E_\lambda(B)$. On conclut

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(B) \quad \dim E_\lambda(B) = \dim E_{\lambda^2}(A)$$

3. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on note $\pm R(\alpha)$ les solutions complexes de l'équation $z^2 = \alpha$. D'après le résultat de la première question, on a

$$\mu \in \text{Sp}(B) \iff \mu^2 \in \text{Sp}(A) \iff \mu \in \{\pm R(\lambda), \lambda \in \text{Sp}(A)\}$$

Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, les racines complexes $\pm R(\alpha)$ sont distinctes. Ainsi

$$\sum_{\mu \in \text{Sp}(B) \setminus \{0\}} \dim E_\mu(B) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{0\}} \dim E_{R(\lambda)}(B) + \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{0\}} \dim E_{-R(\lambda)}(B)$$

D'après le résultat de la question précédente, on a

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{0\} \quad \dim E_{\pm R(\lambda)}(B) = \dim E_\lambda(A)$$

Ainsi

$$\sum_{\mu \in \text{Sp}(B) \setminus \{0\}} \dim E_\mu(B) = 2 \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{0\}} \dim E_\lambda(A)$$

Enfin, en considérant $\lambda = 0$ dans l'équation $BX = \lambda X$ écrite à la première question, on observe $\dim \text{Ker } A = \dim \text{Ker } B$. Ainsi

$$\dim \text{Ker } A + \sum_{\mu \in \text{Sp}(B) \setminus \{0\}} \dim E_\mu(B) = \dim \text{Ker } A + 2 \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A)$$

On pose

$$\alpha = \dim \text{Ker } A \quad \text{et} \quad \beta = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{0\}} \dim E_\lambda(A)$$

Les sev concernés étant en somme directe, on a $\alpha + \beta \leq n$ et en particulier $\beta \leq n$ puis

$$B \text{ diagonalisable} \iff \alpha + 2\beta = 2n \iff \underbrace{\alpha + \beta}_{\leq n} + \underbrace{\beta}_{\leq n} = 2n \iff \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \beta = n$$

On conclut

$$B \text{ diagonalisable} \iff A \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad A \text{ diagonalisable}$$

Exercice 11 (****)

On pose
$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad P_n = \chi_{A_n}$$

1. En considérant $P_n(2 \cos(\theta))$ avec $\theta \in]0; \pi[$, déterminer une expression factorisée de P_n .
2. En déduire que A_n est diagonalisable et préciser ses éléments propres

Corrigé : 1. Soit $\theta \in]0; \pi[$. En développant sur la première ligne, on trouve pour $n \geq 3$

$$P_n(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(\theta) P_{n-1}(2 \cos(\theta)) - P_{n-2}(2 \cos(\theta))$$

Ainsi, la suite $(P_n(2 \cos(\theta)))_{n \geq 1}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$r^2 - 2 \cos(\theta)r + 1 = 0$$

Les racines $e^{\pm i\theta}$ sont complexes conjuguées d'où l'existence de réels λ, μ tels que

$$\forall n \geq 1 \quad P_n(2 \cos(\theta)) = \lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)$$

On a $P_0(2 \cos(\theta)) = 1$ et $P_1(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(\theta)$. Puis, on trouve

$$\begin{cases} P_0(2 \cos(\theta)) = \lambda = 1 \\ P_1(2 \cos(\theta)) = \lambda \cos(\theta) + \mu \sin(\theta) = 2 \cos(\theta) \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \end{cases}$$

Ainsi, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n(2 \cos(\theta)) = \frac{\sin(\theta) \cos(n\theta) + \sin(n\theta) \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

Soit n entier non nul. On a

$$P_n(2 \cos(\theta)) = 0 \iff \sin((n+1)\theta) = 0 \iff \theta \in \left\{ \frac{k\pi}{n+1}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

La fonction $\theta \mapsto \cos(\theta)$ étant injective sur $]0; \pi[$, on a

$$\text{Card} \left\{ \frac{k\pi}{n+1}, k \in \llbracket 1; n \rrbracket \right\} = \text{Card} \left\{ \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right), k \in \llbracket 1; n \rrbracket \right\}$$

Comme P_n est unitaire de degré n et qu'on vient d'exhiber n racines distinctes, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n = \prod_{k=1}^n \left(X - 2 \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right) \right)}$$

Remarque : La suite $(P_n(2 \cos(\theta)))_n$ est la suite des polynômes de Tchebychev de seconde espèce.

2. Soit n entier non nul. La matrice A_n admet n valeurs propres distinctes donc est diagonalisable par condition suffisante. Notons

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$$

On a

$$(A_n - 2 \cos(\theta_k) I_n) X = 0 \iff \forall \ell \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad x_{\ell-1} - 2 \cos(\theta_k) x_\ell + x_{\ell+1} = 0 \quad \text{avec} \quad x_0 = x_{n+1} = 0$$

La suite $(x_\ell)_{\ell \in \llbracket 0; n+1 \rrbracket}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 et comme à la première question, on obtient l'existence de α, β réels tels que

$$\forall \ell \in \llbracket 0; n+1 \rrbracket \quad x_\ell = \alpha \cos(\ell \theta_k) + \beta \sin(\ell \theta_k)$$

La condition $x_0 = 0$ fournit $\alpha = 0$ et on obtient

$$\forall \ell \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad x_\ell = \beta \sin\left(\frac{\ell k \pi}{n+1}\right)$$

On conclut

La matrice A_n est diagonalisable avec $\text{Sp}(A_n) = \left\{ \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), k \in \llbracket 1; n \rrbracket \right\}$
 et $E_{2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}(A_n) = \text{Vect}\left(\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \dots, \sin\left(\frac{nk\pi}{n+1}\right)\right)$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Remarque : On peut invoquer le théorème spectral pour la diagonalisabilité de la matrice symétrique réelle A_n .