TD - Electrostatique

Exercice 1$^{*♥}$: Astre à géométrie sphérique

Un astre de rayon extérieur R est constitué d'un noyau homogène de masse volumique ρ_1 et de rayon $R_1<R$, entouré d'un manteau de masse volumique ρ_2.

1) Préciser les symétries et invariances du problème.
2) Déterminer le champ de gravitation de cet astre en tout point de l'espace.

Exercice 2* : Champ créé par un cylindre et un fil coaxiaux

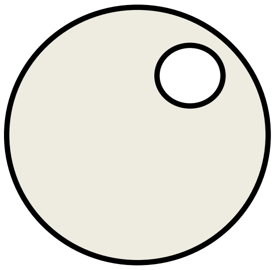
On considère la distribution D constituée par la réunion d'un fil infini (Oz) chargé avec la densité linéique uniforme $\lambda>0$, et d'un cylindre infini de rayon R, d'axe (Oz), chargé avec la densité surfacique $\sigma>0$.
Exprimer le champ électrostatique en tout point de l'espace.

Exercice 3$^{**♥}$: Répartition de charges entre deux plans

On étudie une répartition de charges non uniforme entre deux plans d'équation x=-a et x=a.
La densité volumique de charges est : $\rho(x)=\rho_0 . \cos(\pi x/a)$ si $|x|<a$
$\rho(x)=0$ ailleurs

1) Etudier les propriétés de symétrie et d'invariance de la distribution de charges. En déduire la direction du champ électrostatique et le choix d'une surface de Gauss.
2) Calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace.
3) En déduire le potentiel en tout point de l'espace.

Exercice 4$^{**♥}$: Grotte sphérique



Une cavité sphérique de centre O' est creusée à l'intérieur d'un astre sphérique homogène de centre O et de masse volumique ρ. Déterminer le champ gravitationnel **dans la cavité** en fonction de ρ, G (la constante de gravitation) et du vecteur $\overrightarrow{OO'}$.

Indication : On décomposera le problème en une boule B pleine de centre O, de rayon R et de masse volumique ρ et une boule B' de centre O', de rayon R' et de masse volumique ρ' = -ρ.

Exercice 5$^{**♥}$: Etude du système Terre-électrosphère

Au-delà d'une altitude h=60km, l'atmosphère est ionisée par le rayonnement solaire. Alors sa conductivité est suffisante pour que cette région soit équipotentielle, on l'appelle l'électrosphère. On la modélise par une surface équipotentielle sphérique de rayon R+h (où R=6000 km est le rayon de la Terre), de potentiel V_h et de charge Q (Q>0) uniformément répartie en surface.
D'autre part la Terre est assimilée à un conducteur parfait de potentiel nul (boule équipotentielle) portant la charge –Q uniformément répartie sur sa surface.
L'ensemble forme un condensateur sphérique dont l'armature intérieure est la Terre et dont l'électrosphère est l'armature extérieure. L'air entre les armatures a une permittivité proche de celle du vide. En réalité, l'air est faiblement conducteur et un faible courant de fuite circulant entre les armatures décharge rapidement le condensateur Terre-électrosphère. Mais la convection dans les nuages orageux est responsable de transferts de charges qui rechargent le condensateur et assurent une différence de potentiel de V_h=360kV entre l'électrosphère et le sol.

1) Exprimer en fonction de la charge Q (et…) le champ électrostatique entre les armatures du condensateur.
2) En écrivant la circulation de ce champ entre la Terre et l'électrosphère, exprimer V_h en fonction de Q, R, h et ε_0.
3) En déduire la capacité de ce condensateur en fonction de R, h et ε_0.
4) Calculer numériquement l'énergie électrostatique de ce condensateur et le champ électrostatique au niveau du sol.

Exercice 6*** : Modèle d'orbitale atomique

L'atome d'hydrogène est composé d'un proton de charge +e formant le noyau en O et d'un nuage électronique dont la théorie quantique permet de déterminer la densité de charge ρ_e. Dans l'état fondamental, la densité de charges prend, en coordonnées sphériques la forme: $\rho_e(r)=K.\exp(-2r/a_0)$ où a_0 est le rayon de Bohr.

1) Déterminer la valeur de K permettant d'assurer la neutralité de l'atome.
2) Préciser les caractéristiques (issues des symétries du problème) du champ électrostatique créé par l'atome en tout point de l'espace.
3) Calculer le champ électrostatique et commenter sa décroissance avec la distance au noyau.

Indication : On donne une primitive de $u^2\exp(-u)$: $-(u^2+2u+2)\exp(-u)$.

Réponses :

Ex 1 : 1) Les symétries et invariances donnent $\vec{g} = g(r)\overrightarrow{u_r}$

2) Par le théorème de Gauss

- Si $r \leq R_1$, $\vec{g} = -\frac{4\pi\mathcal{G}\rho_1}{3} r\overrightarrow{u_r}$
- Si $R_1 \leq r \leq R$ $\vec{g} = -\frac{4\pi\mathcal{G}(\rho_1-\rho_2)R_1^3}{3\,r^2}\overrightarrow{u_r} - \frac{4\pi\mathcal{G}\rho_2}{3} r\overrightarrow{u_r}$
- Si $r > R$ $\vec{g} = -\frac{4\pi\mathcal{G}[\rho_2 R^3 + (\rho_1-\rho_2)R_1^3]}{3\,r^2}\overrightarrow{u_r}$

Ex 2 : Si $0 < r < R$, $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\overrightarrow{u_r}$. Si $r > R$, $\vec{E} = \frac{\lambda + 2\pi R\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r}\overrightarrow{u_r}$

Ex 3 : 1) Symétries et invariances… $\vec{E} = E(x)\overrightarrow{u_x}$ et $E(-x) = -E(x)$

2) Par le théorème de gauss :

- Si $|x| \leq a$ $\vec{E}(x) = \frac{\rho_0 a}{\pi\varepsilon_0}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\overrightarrow{u_x}$
- Si $|x| \geq a$ $\vec{E}(x) = \vec{0}$

3) $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$

- Si $|x| \geq a$ V = cte, on choisit V = 0 (choix de l'origine des potentiels)

  Si $|x| \leq a$ $V(x) = \frac{\rho_0 a^2}{\pi^2\varepsilon_0}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) + 1\right]$ (par continuité en x = a)

Ex 4 : $\vec{g} = \frac{4}{3}\pi\mathcal{G}\rho\overrightarrow{O'O}$

Ex 5 : 1) $\vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$ 2) $V_h = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right]$ 3) $C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}}$

4) $W_{élec} = 4{,}4.10^9 J$; $E_{sol} = 6{,}1 V.m^{-1}$

Ex 6 : 1) $K = -e/(\pi.a_0^3)$ 2) $\vec{E}(r) = \frac{e}{[illegible]}[2r^2/a^2 + 2r/a_0 + 1]\exp(-2r/a_0)\overrightarrow{u_r}$