TD – Ch EM 2 - MAGNETOSTATIQUE

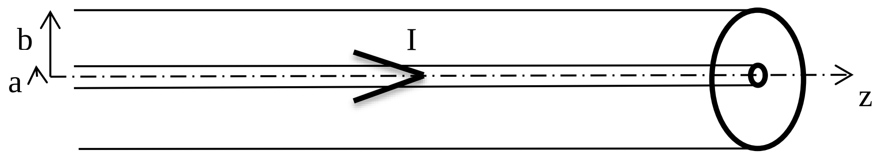
Exercice 1**♥ : NAPPE DE COURANT VOLUMIQUE

On modélise une piste conductrice dans un circuit intégré, où les courants circulent sur de très faibles épaisseurs, par la distribution de courants suivante (en coordonnées cartésiennes):

$$\vec{j} = \begin{cases} j_0\overrightarrow{e_y} & pour - a < z < a \\ \vec{0} & pour\ z < -a\ ou\ z > a \end{cases}$$

1) Analyser les symétries et invariances de cette distribution.
2) Déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace.
3) On passe à la limite surfacique en considérant que l'épaisseur e=2a de la distribution tend vers 0. Donner la distribution surfacique de courant $\overrightarrow{j_S}$ et celle du champ magnétique engendré partout dans l'espace (en fonction de j_s). Le résultat est-il en accord avec la relation de passage pour le champ magnétique en présence de courants surfaciques : $\vec{B}_1 - \vec{B}_2 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{2->1}$?

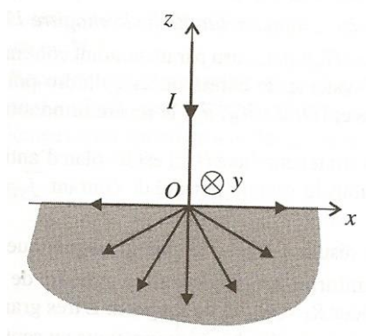
Exercice 2*♥ : CÂBLE COAXIAL



Un câble est constitué de deux conducteurs cylindriques métalliques de même axe (Oz). Ils sont de longueur très grande devant leurs rayons a et b (avec a < b). Le conducteur intérieur est appelé l'âme. Le conducteur extérieur, appelé la gaine, a une épaisseur négligeable. Ils sont séparés par un isolant diélectrique que l'on assimilera au vide.
Ils sont parcourus longitudinalement par la même intensité I, répartie uniformément à la surface des conducteurs.
Le sens du courant est dirigé vers les z croissants sur le conducteur intérieur, mais il est inversé sur le conducteur extérieur.
Déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace.

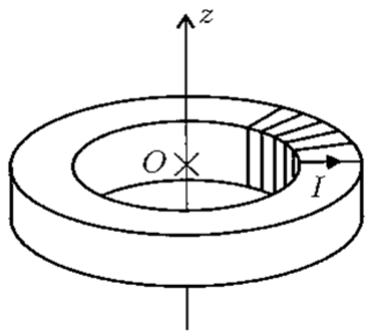
Exercice 3*** : CHAMP MAGNETIQUE D'UN ECLAIR

La distribution de courant ci-contre modélise le courant d'un éclair tombant verticalement sur le sol. Un courant d'intensité I descend l'axe (Oz) et se répand de manière isotrope dans le demi-espace z < 0.
Déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace.



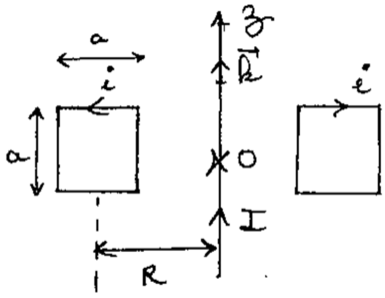
Exercice 4* : BOBINE TORIQUE

On considère un tore d'axe (Oz) dont la section par un plan méridien est un carré. On réalise une bobine en enroulant un fil sur le tore en N spires très serrées et régulièrement réparties.
Calculer le champ magnétique créé en tout point de l'espace lorsqu'on fait passer un courant d'intensité I dans cette bobine.

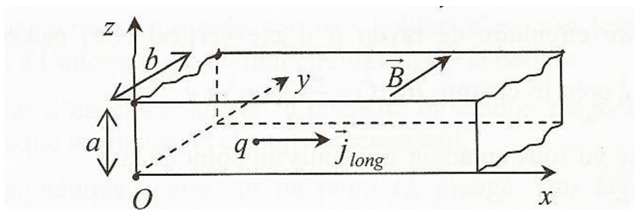


Exercice 5**♥ : INDUCTANCES PROPRE ET MUTUELLE

On considère un tore de section carrée (côté a) sur lequel est embobiné un fil constituant un circuit fermé de N spires (N grand)
Un fil droit infini traverse le tore selon son axe Oz.
Il est parcouru par un courant $I=I_0.\cos(\omega t)$.
1) a) Calculer l'auto-inductance du tore.
b) Déterminer la mutuelle inductance M.
2) Quelle intensité i parcourt le tore de résistance totale r en régime sinusoïdal forcé ?
On pourra commencer par le cas où $r \ll L\omega$.



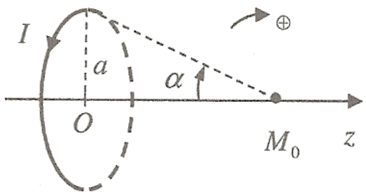
Exercice 6*** : EFFET HALL



Considérons un barreau rectiligne de grande dimension suivant (Ox) et de section droite rectangulaire de côtés a et b. Ce conducteur est parcouru, sous l'influence d'un champ électrostatique $\overrightarrow{E_0} = E_0\overrightarrow{e_x}$, par un courant continu d'intensité I. On suppose que tous les porteurs de charges sont des électrons. On note $\vec{V}$ leur vitesse d'ensemble, n leur densité volumique, et -e leur charge individuelle. Initialement la densité volumique de courant dans le conducteur est uniforme et longitudinale : $\vec{j} = +neV\overrightarrow{e_x}$. A l'instant t=0, ce conducteur est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B\overrightarrow{e_y}$ uniforme et constant.
On considère que les porteurs de charges mobiles sont des électrons de charge –e.

1) Montrer qu'à partir de t=0, le barreau est le siège d'un régime transitoire se caractérisant par l'apparition d'une différence de potentiel et d'un champ électrostatique entre deux faces du conducteur dont on précisera le sens.
2) A quelle condition le régime transitoire prend-il fin ? Exprimer, en régime permanent, le champ électromagnétique transversal (appelé champ de Hall) en fonction de la constante de Hall $A_H=1/nq$ (en $m^3.C^{-1}$), de $\vec{j}$ et de $\vec{B}$. Exprimer de même la différence de potentiel U_H (dite ddp de Hall) entre les deux faces du conducteur identifiées à la question précédente en fonction de A_H, I, b et de la norme du champ magnétique B.
3) Un capteur à effet Hall est constitué d'une pastille semi-conductrice d'Antimoniure d'indium (InSb) de surface a^2=1mm² et d'épaisseur b=0,1mm.
   a) Expliquer le principe de mesure d'un champ magnétique par une sonde à effet Hall.
   b) Sachant que dans un tel semi-conducteur la densité volumique de porteurs de charges est de $n=10^{22}m^{-3}$ alors qu'elle est de $n=10^{28}m^{-3}$ dans un bon conducteur comme le cuivre, discuter l'intérêt d'utiliser l'Antimoniure d'indium pour la fabrication d'une telle sonde.

Exercice 7***♥ : Champ créé en dehors de l'axe par une spire circulaire



Une spire circulaire de centre 0, de rayon a et d'axe (Oz) est parcourue par un courant d'intensité I.

Le champ créé par cette spire en un point M_0 de l'axe est $\overrightarrow{B_0}(M_0) = \frac{\mu_0 I}{2a} sin^3(\alpha)\overrightarrow{u_z}$ où α est le demi-angle, orienté, sous lequel la spire est vue à partir du M_0.

Un point M voisin de M_0 se trouve à la même abscisse z mais à une distance r de l'axe.

1) A quelles conclusions pour $\vec{B}(M)$ conduit l'examen des propriétés de symétrie et d'invariance ?
2) Montrer, à partir de la conservation du flux à travers un petit cylindre centré sur M_0 et passant par M, que si r est suffisamment petit devant a, la composante radiale du champ en M s'écrit :
$$B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{dB_0}{dz}(z)$$
3) Quel est le signe de $B_r(r,z)$? Esquisser et orienter les lignes de champ magnétique autour de la spire et de son axe.

Réponses :

Ex 1 : 2) $\vec{B} = -\mu_0 j_0 a\,\overrightarrow{u_x}$ si $z < -a$; $\vec{B} = \mu_0 j_0 z\,\overrightarrow{u_x}$ si $-a < z < a$; $\vec{B} = \mu_0 j_0 a\,\overrightarrow{u_x}$ si $z > a$

3) $j_S = 2aj_0$ $\vec{B} = -\mu_0 j_S/2\,\overrightarrow{u_x}$ si $z < 0$; $\vec{B} = \mu_0 j_S/2\,\overrightarrow{u_x}$ si $z > 0$

Ex 2 : $\vec{B} = \mu_0 I/(2\pi r)\,\overrightarrow{u_\theta}$ si $a < r < b$ $\vec{B} = \vec{0}$ si $r < a$ ou $r > b$

Ex 3 : Si $0 \leq \theta \leq \pi/2$ $\vec{B} = -\mu_0 I/(2\pi r\sin\theta)\,\overrightarrow{u_\varphi}$; Si $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ $\vec{B} = -\mu_0 I(1+\cos\theta)/(2\pi r\sin\theta)\,\overrightarrow{u_\varphi}$

Ex 4 : $\vec{B} = \mu_0 NI/(2\pi r)\,\overrightarrow{u_\theta}$ à l'intérieur ; $\vec{B} = \vec{0}$ à l'extérieur

Ex 5 : 1) a) $L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ln\left(\frac{R+a/2}{R-a/2}\right)$ $M = \frac{\mu_0 N a}{2\pi}\ln\left(\frac{R+a/2}{R-a/2}\right)$

2) $L\,di/dt + ri = MI_0\omega\sin(\omega t)$ $i(t) = \frac{MI_0\omega}{r^2+L^2\omega^2}[r\sin(\omega t) - L\omega\cos(\omega t)]$

Ex 6 : 1) Faces supérieure et inférieure

2) $\overrightarrow{E_H} = -A_H\vec{j}\wedge\vec{B}$ $U_H = A_H IB/b$ 3) b) $U_H(InSb)/U_H(Cu) = 10^6$

Ex 7 : 1) $\vec{B}(M) = B_r(r,z)\overrightarrow{u_r} + B_Z(r,z)\overrightarrow{u_Z}$ 2) $-B_0(z)\pi r^2 + B_0(z+dz)\pi r^2 + B_r 2\pi r dz = 0$

3) $B_r(r,z) = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{3a^2 rz}{2(a^2+z^2)^{5/2}} > 0$