Préparation à l'interrogation n°09

1 Équation différentielle linéaire

Soient a, b dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ et $(t_0, x_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K}$. Il existe une unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) & \text{(L)} \\ x(t_0) = x_0 & \text{(CI)} \end{cases}$$

et celle-ci est donnée par

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(s)} b(s) \, \mathrm{d}s \right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{A}(t) = \int_{t_0}^{t} a(s) \, \mathrm{d}s$$

2 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\ln(1+x)$;
2. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\cos(x)$;
3. Équivalent en 1 de $\ln(x)$;
4. Équivalent en $+\infty$ de $\mathrm{th}\,(x) - 1$;
5. Développement asymptotique à 3 termes de $\sqrt{1+n} = \sqrt{n}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} = \ldots$

3 Trigonométrie

1. $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
2. $\sin(t)^2 = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$

4 Calcul intégral

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \int^x \frac{1+t+1-t}{2(1-t)(1+t)} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int^x \left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right] \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$;
2. $\displaystyle\int^x \ln(t) \, \mathrm{d}t = [t\ln(t)]^x - \int^x \mathrm{d}t = x\ln(x) - x$;
3. Formule de Taylor avec reste intégral.

5 Formules

1. Inégalité de Taylor-Lagrange
2. $x^n - y^n = (x-y)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$

6 Séries numériques

1. Encadrement du reste d'une série par comparaison série/intégrale ;
2. Critère de d'Alembert ;
3. Critère des séries alternées ;
4. Contrôle du reste d'une série alternée.

7 Exercice type

Équivalent $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ (voir cours).

8 Exercice type

Montrer que $\mathrm{K} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant 1\}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

Corrigé : On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \varphi_0(x) = x_1 \qquad \forall i \in [\![1\,;\, n-1]\!] \qquad \varphi_i(x) = x_{i+1} - x_i \quad \text{et} \quad \varphi_n(x) = 1 - x_n$$

Les φ_i sont continues car polynomiales et on a $\mathrm{K} = \bigcap_{i=0}^{n} \varphi_i^{-1}(\mathbb{R}_+)$ qui est fermé comme intersection de fermés (construits comme images réciproques de fermés par des applications continues). Puis, pour $x \in \mathrm{K}$, on a $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ d'où le caractère borné de K. Comme l'espace $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, on conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble K est un compact de } \mathbb{R}^n.}$$

9 Exercice type

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$. Montrer $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de E est un fermé non compact d'intérieur vide.

Corrigé : L'indice de nilpotence est majoré par n. Notant $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^n$ continue par continuité du produit matriciel, on a $\mathcal{N} = \varphi^{-1}(\{0\})$. Puis, la suite $(k\mathrm{E}_{1,n})_k$ est à valeurs dans $\mathcal{N}$ et non bornée. Enfin, pour $\mathrm{A} \in \mathcal{N}$, on a par densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ que $\mathrm{B}(\mathrm{A}, \varepsilon) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \neq \varnothing$ pour tout $\varepsilon > 0$. Il en résulte qu'aucune boule ouverte n'est incluse dans $\mathcal{N}$ puisque les matrices nilpotentes sont non inversibles. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{N} \text{ est un fermé non compact d'intérieur vide.}}$$

10 Exercice type

Contre exemple au théorème de Rolle pour une fonction à valeurs dans un espace de dimension $\geqslant 2$ (voir cours).

11 Questions de cours

Séries et fonctions vectorielles, graphes usuels.