ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 17/10/2024

# Commentaires - Devoir en temps libre n°5

Étant donné E un $\mathbb{K}$-ev, pour établir que $f$ est un endomorphisme de E, il faut justifier la linéarité de $f$ (mentionner $f(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{E}}$ n'est pas faux mais ne fait pas partie de la vérification d'usage et par conséquent, cela fait très mauvais effet !) et vérifier $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}$. Certains oublient systématiquement cette étape.

## Problème I

1. Ne pas oublier de mentionner $\varphi(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}$.

2. Nombreux sont ceux qui établissent que $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\mathrm{X}$ est annulateur de $\varphi$. Pour justifier que P est scindé à racines simples, il faut préciser $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) \neq 0$. On en déduit bien que $\varphi$ est diagonalisable mais ça ne fournit qu'une inclusion sur le spectre, à savoir $\mathrm{Sp}\,(\varphi) \subset \mathrm{P}^{-1}\,(\{0\})$. Il faut donc déterminer précisément ce spectre puis les espaces propres et pour cela, un raisonnement par équivalence s'impose avec

$$\varphi(\mathrm{M}) = \lambda \mathrm{M} \iff \dots$$

avec $\lambda \in \{0, -\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\}$. Si on procède par implication, on obtient seulement une inclusion pour les sous-espaces propres. Il faut alors compléter, soit en étudiant l'inclusion réciproque, soit avec un argument de dimension.

## Problème II

1. Question traitée dans le cours. Certains échouent à produire une rédaction correcte, c'est inacceptable. On a $u^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ ce qui justifie l'existence d'un $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0_{\mathrm{E}}$. Sans cet argument décisif, il est difficile de valoriser une réponse.

2. Bien traitée pour la plupart, il faut procéder par double implication. Quelques rédactions très bizarres avec l'argument $(x, u(x), \dots, u^n(x))$ famille liée pour aboutir péniblement à $u^n(x) \in \mathrm{Vect}\,(x, \dots, u^{n-1}(x))$ qui est évident si $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

3.(a) OK pour presque tous.

3.(b) Moyennement réussie. Notant $d = \deg \pi_u$, il faut expliciter la minoration $d \geqslant n$ en invoquant la liberté de $(\mathrm{id}\,, \dots, u^{n-1})$ et ne pas oublier de préciser que $\pi_u$ et $\chi_u$ sont unitaires pour conclure à l'égalité.

## Problème III

(i) Vu en classe. Certains parviennent à écrire des choses incomplètes, voire fausses … Une restriction n'est pas un endomorphisme induit.

(ii) Question un peu délicate, quelques uns ont pensé à examiner la relation de commutation avec des matrices élémentaires.

1. OK, ne pas oublier $\Phi(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}$.

2.(a) Réussite mitigée. Certains n'aboutissent pas dans le calcul par manque de persévérance, c'est dommage.

2.(b) Beaucoup de confusions. Il ne s'agit pas d'invoquer la condition suffisante de diagonalisation mais d'établir qu'on dispose d'une base de vecteurs propres fournie par le résultat de la question précédente.

3.(a) Peu abordée bien qu'il s'agisse d'un résultat du cours.

3.(b) Abordée par quelques uns et parmi ceux-là, très peu reconnaissent la démarche déjà exposée pour le caractère nilpotent de $\Phi_n$.

3.(c) Assez bien réussie.

3.(d) Un endomorphisme nilpotent et diagonalisable est nul.

3.(e) Beaucoup de confusions chez ceux qui ont abordé la question. Il s'agit d'établir $\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_2 = 0$ ce qui prouve que $\mathrm{A} = \mathrm{D}_1$ et $\mathrm{B} = \mathrm{D}_2$ (une homothétie nilpotente est nulle !).