ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 07/11/2024

Corrigé du devoir en temps libre n°6

Problème I

1. L'application N_1 est une norme (étudiée en cours). Les applications N_2 et N_3 vérifient sans difficulté l'homogénéité et l'inégalité triangulaire. Détaillons la séparation. Pour $f \in \mathrm{E}$, on a

$$\mathrm{N}_2(f) = 0 \iff f + f' = 0 \iff f \in \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\right) \quad \text{et} \quad f(0) = 0 \iff f = 0$$

puis
$$\mathrm{N}_3(f) = 0 \iff f' = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0 \iff f = 0$$

Ainsi
$$\boxed{\text{Les applications } \mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2 \text{ et } \mathrm{N}_3 \text{ sont des normes.}}$$

2. Pour n entier, on pose $f_n : t \mapsto t^n$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{N}_1(f_n) = 1 \qquad \mathrm{N}_3(f_n) = n$$

ce qui prouve que N_1 et N_3 ne sont pas équivalentes. Soit $f \in \mathrm{E}$. On a

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t f'(s)\,\mathrm{d}s$$

D'où
$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad |f(t)| \leqslant \|f'\|_\infty \int_0^t \mathrm{d}s \leqslant \mathrm{N}_3(f)$$

Et par conséquent
$$\|f\|_\infty \leqslant \mathrm{N}_3(f)$$

Par inégalité triangulaire, il vient

$$\mathrm{N}_2(f) \leqslant \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leqslant 2\mathrm{N}_3(f)$$

Posons ensuite $g = f + f'$. Par variation de la constante, on trouve

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad f(t) = \int_0^t g(s)\mathrm{e}^{s-t}\,\mathrm{d}s$$

d'où
$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad |f(t)| \leqslant \|g\|_\infty \int_0^t \mathrm{e}^{s-t}\,\mathrm{d}s \leqslant \|g\|_\infty = \mathrm{N}_2(f)$$

Ainsi, par inégalité triangulaire, on obtient

$$\mathrm{N}_3(f) = \|g - f\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty + \|f\|_\infty \leqslant 2\mathrm{N}_2(f)$$

Par transitivité, on conclut

$$\boxed{\text{Les normes } \mathrm{N}_2 \text{ et } \mathrm{N}_3 \text{ sont équivalentes mais } \mathrm{N}_1 \text{ n'est équivalente à aucune autre.}}$$

Remarque : On a établi en particulier $\mathrm{N}_1 \leqslant \mathrm{N}_3 \leqslant 2\mathrm{N}_2$ ce qui prouve que les normes N_2 et N_3 sont plus fines que N_1.

Problème II

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$. On remarque

$$\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \| \left(\|(a_{i,1}, \ldots, a_{i,n})\|_1 \right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \|_\infty$$

avec les normes classiques $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Les propriétés d'homogénéité, de séparation et d'inégalité triangulaire en résultent. Soient A et B dans E. Pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, on a

$$\sum_{j=1}^{n} |(\mathrm{AB})_{i,j}| = \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\, |b_{k,j}|$$

puis
$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\, |b_{k,j}| = \sum_{k=1}^{n} \Bigg(|a_{i,k}| \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |b_{k,j}|}_{\leqslant \mathrm{N}(\mathrm{B})} \Bigg) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\, \mathrm{N}(\mathrm{B}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A})\mathrm{N}(\mathrm{B})$$

On conclut $\boxed{\text{L'application N est une norme sous-multiplicative sur E.}}$

2. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|$ résultent directement des propriétés de la norme N. Pour $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$, si $\|\mathrm{A}\| = 0$, alors la matrice A est semblable à la matrice nulle par séparation de N et c'est donc la matrice nulle. Pour A, B dans E, il vient d'après le caractère sous-multiplicatif de N :

$$\|\mathrm{AB}\| = \mathrm{N}(\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQQ}^{-1}\mathrm{BQ}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ})\mathrm{N}(\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{BQ}) = \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$$

On conclut $\boxed{\text{L'application } \|\cdot\| \text{ est une norme sous-multiplicative sur E.}}$

3.(a) Le polynôme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss. Ainsi

$$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ telle que } \mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} \text{ est triangulaire supérieure.}}$$

3.(b) Les matrices Δ et $\Delta^{-1} = \mathrm{diag}(1, \delta^{-1}, \ldots, \delta^{1-n})$ sont diagonales donc triangulaires supérieures. Or, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures est stable par produit et par conséquent

$$\boxed{\text{La matrice } \widehat{\mathrm{T}} = \Delta^{-1}\mathrm{T}\Delta \text{ est triangulaire supérieure.}}$$

On a

$$\mathrm{T}\Delta = \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} t_{i,j} \mathrm{E}_{i,j} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \delta^{k-1} \mathrm{E}_{k,k} \right) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \sum_{k=1}^{n} \delta^{k-1} t_{i,j} \underbrace{\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,k}}_{=\delta_{j,k}\mathrm{E}_{i,k}} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \delta^{j-1} t_{i,j} \mathrm{E}_{i,j}$$

puis

$$\Delta^{-1}\mathrm{T}\Delta = \left(\sum_{k=1}^{n} \delta^{1-k} \mathrm{E}_{k,k} \right) \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \delta^{j-1} t_{i,j} \mathrm{E}_{i,j} \right) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \sum_{k=1}^{n} \delta^{j-k} t_{i,j} \underbrace{\mathrm{E}_{k,k}\mathrm{E}_{i,j}}_{=\delta_{k,i}\mathrm{E}_{k,j}} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \delta^{j-i} t_{i,j} \mathrm{E}_{i,j}$$

Les matrices A et T sont semblables d'où $\rho(\mathrm{A}) = \rho(\mathrm{T}) < 1$. Pour $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$ avec $i < j$, on a

$$\widehat{\mathrm{T}}_{i,j} = \delta^{j-i} t_{i,j} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$$

Par suite, pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, on trouve pour $\delta \to 0$

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \widehat{\mathrm{T}}_{i,j} \right| = |t_{i,i}| + \sum_{j=i+1}^{n} \delta^{j-i} |t_{i,j}| \leqslant \rho(\mathrm{T}) + \mathrm{o}(1)$$

Comme $\rho(\mathrm{T}) < 1$, pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$, on peut choisir δ assez petit pour avoir $\sum\limits_{j=1}^{n} \left|\widehat{\mathrm{T}}_{i,j}\right| < 1$ et comme il n'y a qu'un nombre fini de termes à contrôler, on conclut

$$\boxed{\text{On peut choisir } \delta > 0 \text{ pour avoir } \mathrm{N}(\widehat{\mathrm{T}}) < 1.}$$

3.(c) On a $\qquad \|\mathrm{A}\| = \mathrm{N}(\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{Q}) = \mathrm{N}(\Delta^{-1}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}\Delta) = \mathrm{N}(\Delta^{-1}\mathrm{T}\Delta) = \mathrm{N}(\widehat{\mathrm{T}}) < 1$

Comme la norme $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative, on montre par récurrence immédiate $\|\mathrm{A}^p\| \leqslant \|\mathrm{A}\|^p$ et $\|\mathrm{A}\|^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$. On conclut

$$\boxed{\|\mathrm{A}\| < 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{A}^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0}$$

Problème III

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ avec $\mathrm{P} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n$, on munit E de $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|\mathrm{P}\|_\infty = \operatorname*{Max}\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$.
On dit qu'une suite $(\mathrm{P}_n)_n$ est *de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall (p,n) \in \mathbb{N}^2 \quad n \geqslant \mathrm{N} \quad \Longrightarrow \quad \|\mathrm{P}_{n+p} - \mathrm{P}_n\| \leqslant \varepsilon$$

On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{X}^k}{k}$$

1. Montrer que $(\mathrm{P}_n)_n$ est de Cauchy.
2. Montrer que $(\mathrm{P}_n)_n$ ne converge pas.

1. Soient n entier non nul et p entier. On a

$$\|\mathrm{P}_{n+p} - \mathrm{P}_n\| = \|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\mathrm{X}^k}{k}\| = \frac{1}{n+1} = \mathrm{o}(1)$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe donc un seuil N entier tel que pour $n \geqslant \mathrm{N}$ et p entier, on ait $\|\mathrm{P}_{n+p} - \mathrm{P}_n\| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire

$$\boxed{\text{La suite } (\mathrm{P}_n)_n \text{ est de Cauchy.}}$$

2. Supposons $(\mathrm{P}_n)_n$ convergente. Il existe alors $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{P}$. Notons $p = \deg \mathrm{P}$. Soit n entier. On note α_k le coefficient de degré k de $\mathrm{P}_n - \mathrm{P}$. Il vient

$$\forall n \geqslant p+1 \qquad \|\mathrm{P}_n - \mathrm{P}\| \geqslant \operatorname*{Max}_{k\geqslant p+1} |\alpha_k| = \frac{1}{p+1}$$

Ceci contredit $\|\mathrm{P}_n - \mathrm{P}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et on conclut

$$\boxed{\text{La suite de Cauchy } (\mathrm{P}_n)_n \text{ ne converge pas.}}$$

Remarque : Un espace dans lequel toute suite de Cauchy converge est dit *complet* (il n'est pas « troué »). Ici, l'espace $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ n'est pas complet. Un espace vectoriel complet est appelé *espace de Banach.*