Devoir en temps libre n°7

Problème I

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ avec n entier non nul et $x_1, \ldots, x_p$ des réels dans $[\,0\,;1\,]$ deux à deux distincts.

On pose $\quad \forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \|\mathrm{P}\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t\in[\,0\,;1\,]} |\mathrm{P}(t)| \quad$ et $\quad \mathrm{A} = \bigcap_{i=1}^{p} \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \mid |\mathrm{P}(x_i)| \leqslant 1\}$

1. Justifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.
2. Montrer que A est un compact si et seulement si $p \geqslant n$.
3. On suppose $p = n$. Soit $(\mathrm{P}_k)_k \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\mathrm{P}_k(x_i) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ pour tout $i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$. Établir

$$\|\mathrm{P}_k\|_\infty \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Problème II

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ avec n entier. On pose

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \|\mathrm{P}\|_1 = \int_0^1 |\mathrm{P}(t)| \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \mid \mathrm{P}(0) \geqslant 0\}$$

1. Justifier que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E.
2. Montrer que A est un fermé non vide de E. L'ensemble A est-il compact ?
3. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$.
   (a) Justifier qu'il existe $(\mathrm{Q}_k)_k \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ telle que

   $$\|\mathrm{P} - \mathrm{Q}_k\|_1 \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{A})$$

   (b) En déduire qu'il existe $\mathrm{Q} \in \mathrm{A}$ tel que $\mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{A}) = \|\mathrm{P} - \mathrm{Q}\|_1$.

Problème III

Soit E un $\mathbb{K}$-ev normé non nul de dimension finie et une suite de boules fermées $(\mathrm{B}_f(a_n, r_n))_n$ décroissantes pour l'inclusion et telle que la suite $(r_n)_n$ ne tend pas vers zéro.

1. Soit n entier. En considérant $a_{n+1} + r_{n+1}u$ avec u quelconque dans $\mathrm{S}(0,1)$ si $a_n = a_{n+1}$ et $u = \dfrac{a_{n+1} - a_n}{\|a_{n+1} - a_n\|}$ sinon, établir que la suite $(r_n)_n$ est décroissante puis convergente de limite $r \geqslant 0$.
2. Justifier que la suite $(a_n)_n$ admet une valeur d'adhérence $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_f(a_n, r_n)$.

   On notera φ une extractrice telle que $a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.
3. Établir $\qquad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \qquad \|a_n - a_p\| \leqslant |r_n - r_p|$
4. Conclure que $\qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_f(a_n, r_n) = \mathrm{B}_f(a, r)$