ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°33

Exercice 1 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $(\mathrm{A}^p)_p$ bornée. Pour p entier non nul, on pose $\mathrm{B}_p = \dfrac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{A}^k$.

1. Montrer que la suite $(\mathrm{B}_p)_{p\geqslant 1}$ admet une valeur d'adhérence B.
2. Montrer que B vérifie $\mathrm{B}(\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) = 0$.
3. En déduire B est une matrice de projection sur $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$.
4. Conclure sur le comportement asymptotique de $(\mathrm{B}_p)_{p\geqslant 1}$.

Corrigé : 1. La suite $(\mathrm{B}_p)_{p\geqslant 1}$ est bornée car $(\mathrm{A}^p)_p$ l'est. Ainsi, il existe une extractrice φ telle que

$$\boxed{\mathrm{B}_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{B}}$$

2. Par téléscopage, il vient $$\mathrm{B}_p(\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) = \frac{1}{p}(\mathrm{I}_n - \mathrm{A}^p)$$

d'où $$\|\mathrm{B}(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})\| \leqslant \frac{1}{p}\left(\|\mathrm{I}_n\| + \|\mathrm{A}^p\|\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

Ainsi $$\mathrm{B}_p(\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

et par continuité du produit matriciel

$$\mathrm{B}_{\varphi(p)}(\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{B}(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})$$

Par unicité de la limite, on conclut $\boxed{\mathrm{B}(\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) = 0}$

3. On vérifie sans difficulté

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) \subset \mathrm{Ker}\,(\mathrm{B}-\mathrm{I}_n) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{B}$$

Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) \cap \mathrm{Im}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$. On a $\mathrm{AX} = \mathrm{X}$ d'où $\mathrm{B}_{\varphi(p)}\mathrm{X} = \mathrm{X}$ et faisant tendre $p \to +\infty$, il vient $\mathrm{BX} = \mathrm{X}$ par continuité du produit matriciel. On a également $\mathrm{BX} = 0$ d'où $\mathrm{X} = 0$ et avec le théorème du rang, on obtient

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) \oplus \mathrm{Im}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$$

Les sev $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{B}-\mathrm{I}_n)$ et $\mathrm{Ker}\,\mathrm{B}$ étant clairement en somme directe, il vient pour raison de dimension

$$\mathrm{Im}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{B} \qquad \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{B}-\mathrm{I}_n) \quad \text{et} \quad \mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}\,\mathrm{B} \oplus \mathrm{Ker}\,(\mathrm{B}-\mathrm{I}_n)$$

On conclut

$$\boxed{\text{La matrice B est matrice de projection sur } \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) \text{ parallèlement à } \mathrm{Im}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n).}$$

4. La suite $(\mathrm{B}_p)_{p\geqslant 1}$ est bornée dans une espace de dimension finie avec pour unique valeur d'adhérence la matrice B précédemment décrite. On conclut

$$\boxed{\mathrm{B}_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{B}}$$

Exercice 2 (***)

Soit F une partie finie de $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{C} \setminus F$ est connexe par arcs.

Corrigé : Soient $M_1, \ldots, M_n$ des points du plan $\mathbb{R}^2$ et A, B dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{M_1, \ldots, M_n\}$. On note $\overrightarrow{a_i}$ un vecteur normalisé directeur de (AM_i) et de même $\overrightarrow{b_i}$ un vecteur normalisée directeur de (BM_i). On choisit $\overrightarrow{u}$ normalisé hors de $\{\pm\overrightarrow{a_1}, \ldots, \pm\overrightarrow{a_n}\}$ puis $\overrightarrow{v}$ normalisé hors de $\left\{\pm u, \pm\overrightarrow{b_1}, \ldots, \pm\overrightarrow{b_n}\right\}$ (choix possibles car les ensembles à exclure sont finis). Ainsi, les droites $A + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ et $B + \overrightarrow{v}$ sont sécantes en un point C et ne rencontrent aucun des M_i. Par conséquent, on peut définir le chemin

$$\forall t \in [0;1] \qquad \varphi(t) = \begin{cases} A + 2tAC\overrightarrow{u} & \text{si } t \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right] \\ C + (2t-1)CB\overrightarrow{v} & \text{si } t \in \left[\dfrac{1}{2};1\right] \end{cases}$$

Le chemin est continu, relie A à B et est à valeurs dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{M_1, \ldots, M_n\}$. Considérant les affixes de ces points, on conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathbb{C} \setminus F \text{ est connexe par arcs.}}$$

Exercice 3 (***)

Soit E un evn, X une partie compacte non vide de E et $f : X \to X$ telle que

$$\forall (x,y) \in X^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$$

1. Soit $a \in X$. Montrer que a est valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Montrer que f est une isométrie, *i.e.*

$$\forall (x,y) \in X^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

3. Montrer que f est une bijection de X sur X.

Corrigé : 1. Par récurrence immédiate, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall (x,y) \in X^2 \qquad \|x - y\| \leqslant \|f^k(x) - f^k(y)\|$$

d'où $$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad \|u_n - u_0\| \leqslant \|f^k(u_n) - f^k(u_0)\| = \|u_{n+k} - u_k\|$$

La suite $(u_n)_n$ est à valeurs dans X compact donc il existe φ une extractrice telle que $\left(u_{\varphi(n)}\right)_n$ converge dans X. On définit ψ sur $\mathbb{N}$ par $\psi(0) = \varphi(0)$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \psi(n+1) = \min\{\varphi(k),\ k > 2\psi(n)\}$$

D'après le résultat préliminaire, pour n entier

$$\|u_{\psi(n+1)-\psi(n)} - u_0\| \leqslant \|u_{\psi(n+1)} - u_{\psi(n)}\|$$

Il s'ensuit $$u_{\psi(n+1)-\psi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

Enfin, par construction, on a $\psi(n+1) > 2\psi(n)$ pour n entier d'où

$$\psi(n+2) - \psi(n+1) - (\psi(n+1) - \psi(n)) > \psi(n) \leqslant 0$$

ce qui prouve la stricte croissance de $(\psi(n+1) - \psi(n))_n$ qui est donc une extractrice. Ainsi

$$\boxed{\text{La valeur } a \text{ est valeur d'adhérence de } (u_n)_n.}$$

Remarque : L'extractrice $\psi(\dot{+}1)-\psi$ est complètement déterminée par le choix de φ.

2. Soit $(a,b)\in \mathrm{X}^2$. On construit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ comme précédemment. L'espace X^2 est compact comme produit d'espaces compacts. Ainsi, la suite $(u_n,v_n)_n$ admet une valeur d'adhérence et avec le même procédé que celui vu précédemment, on construit une extractrice χ telle que

$$u_{\chi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \quad \text{et} \quad v_{\chi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} b$$

Par ailleurs, comme $\chi(n)\geqslant 1$ pour tout entier $n\geqslant 1$, il vient

$$\forall n\geqslant 1 \qquad \|f(a)-f(b)\|\leqslant \|f^{\chi(n)-1}(f(a))-f^{\chi(n)}(f(b))\| = \|u_{\chi(n)}-v_{\chi(n)}\|$$

Faisant tendre $n\to +\infty$, on obtient $\|f(a)-f(b)\|\leqslant \|a-b\|$ et l'autre inégalité est vraie par hypothèse. Ainsi, on conclut que

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est une isométrie.}}$$

3. Comme f est une isométrie, elle est injective et continue. Comme X est compact, l'ensemble $f(\mathrm{X})$ est compact. D'après le résultat de la première question, on a $\mathrm{X}\subset\overline{f(\mathrm{X})}$ et comme $f(\mathrm{X})$ est compact donc fermé, il s'ensuit que $\mathrm{X}\subset f(\mathrm{X})=\overline{f(\mathrm{X})}$. L'autre inclusion étant vraie par hypothèse, on a $f(\mathrm{X})=\mathrm{X}$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est une bijection de X sur X.}}$$

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn, K un compact convexe non vide et $u\in\mathscr{L}_c(\mathrm{E})$ tel que $u(\mathrm{K})\subset \mathrm{K}$. On note $\mathrm{C}=(\mathrm{id}-u)(\mathrm{K})$ puis on pose

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \qquad u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u^k \quad \text{et} \quad x_n=(\mathrm{id}-u)\circ u_n(a) \quad \text{avec} \quad a\in \mathrm{K}$$

1. Montrer que C est un compact.
2. Montrer que $(x_n)_n\in\mathrm{C}^{\mathbb{N}}$ puis $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
3. En déduire que u admet un point fixe dans K.

Corrigé : 1. On a $\mathrm{id}-u$ continue et $\mathrm{C}=(\mathrm{id}-u)(\mathrm{K})$ est l'image directe d'un compact par une application continue donc

$$\boxed{\text{L'ensemble C est compact.}}$$

2. Par récurrence immédiate, on a $u^k(\mathrm{K})\subset\mathrm{K}$ pour tout k entier. Par convexité de K, on a

$$\forall n\in\mathrm{K}\times\mathbb{N}^* \qquad u_n(a)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u^k(a)\in\mathrm{K}$$

Par conséquent, on a $x_n\in(\mathrm{id}-u)(\mathrm{K})$ pour tout n entier. Puis, par téléscopage,

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \qquad x_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[u^k(a)-u^{k+1}(a)\right]=\frac{1}{n}\left[a-u^n(a)\right]$$

L'ensemble K est compact donc borné et par conséquent, il existe $\mathrm{M}\geqslant 0$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \qquad \|x_n\|\leqslant\frac{1}{n}\left(\|a\|+\|u^n(a)\|\right)\leqslant\frac{2\mathrm{M}}{n}$$

On conclut $\boxed{(x_n)_n\in\mathrm{C}^{\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

3. L'ensemble C est compact donc fermé. Or, on a construit une suite à valeurs dans C convergente de limite nulle. Par fermeture de C, on en déduit

$$0 \in \mathrm{C} = (\mathrm{id} - u)(\mathrm{K})$$

Autrement dit $$\boxed{\exists x \in \mathrm{K} \quad | \quad u(x) = x}$$

Remarque : Il s'agit du *théorème de Markov-Kakutani.*

Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On rappelle que pour $\mathrm{X} \subset \mathrm{E}$, l'enveloppe convexe de X notée Conv(X) vérifie

$$\mathrm{Conv}(\mathrm{X}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, n \geqslant 1, (x_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} \in \mathrm{X}^n, (\alpha_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} \in \mathbb{R}_+^n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

Si E est de dimension n, alors tout élément de Conv(X) peut s'écrire comme combinaison convexe de $n+1$ éléments de X (théorème de Carathéodory, voir feuilles de convexité). Montrer que dans ce cas, si X est compact, alors Conv(X) est compact.

Corrigé : Posons $$\mathrm{K} = \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \quad | \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1 \right\}$$

L'ensemble K est un fermé borné de $\mathbb{R}^{n+1}$ espace de dimension finie d'où K compact. On note

$$\Phi\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \times \mathrm{E}^{n+1} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (\alpha, x) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i \end{array} \right.$$

Soient (α, x) et (β, y) dans $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathrm{E}^{n+1}$. On obtient

$$\begin{aligned} \|\Phi(\alpha, x) - \Phi(\beta, y)\| &= \|\Phi(\alpha, x) - \Phi(\alpha, y) + \Phi(\alpha, y) - \Phi(\beta, y)\| \\ &\leqslant \|\alpha\|_1 \|x - y\|_\infty + \|y\|_1 \|\alpha - \beta\|_\infty \end{aligned}$$

et la continuité de Φ s'en déduit. Puis, on observe que

$$\mathrm{Conv}(\mathrm{X}) = \Phi(\mathrm{K} \times \mathrm{X}^{n+1})$$

Or, l'ensemble $\mathrm{K} \times \mathrm{X}^{n+1}$ est compact comme produit de compacts et l'image d'un compact par une application continue étant compact, on conclut

$$\boxed{\text{Si X est compact dans E un } \mathbb{R}\text{-ev de dimension } n, \text{ alors Conv(X) est compacte.}}$$

Exercice 6 (***)

Une matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *cyclique* s'il existe $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que

$$\mathrm{Vect}\,(\mathrm{X}, \mathrm{AX}, \ldots, \mathrm{A}^{n-1}\mathrm{X}) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$$

Montrer que l'ensemble des matrices cycliques $\mathscr{C}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense connexe par arcs.

Corrigé : Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{C}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}\,(\mathrm{X}, \mathrm{AX}, \ldots, \mathrm{A}^{n-1}\mathrm{X}) = n$. On pose

$$\Phi\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \det(\mathrm{X}, \mathrm{MX}, \ldots, \mathrm{M}^{n-1}\mathrm{X}) \end{array} \right.$$

L'application Φ est polynomiale en les coefficients de M donc continue. On a $\Phi(\mathrm{A}) \neq 0$ et par conséquent, l'ensemble $\Phi^{-1}(\mathbb{C}^*)$, ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue, est un voisinage ouvert de A dans $\mathscr{C}_n(\mathbb{C})$. Soit $\mathscr{D}_n^s(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables à valeurs propres simples. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{D}_n^s(\mathbb{C})$, $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé et $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de diagonalisation. On pose $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i$. On obtient

$$\det_{\mathscr{B}}(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

en reconnaissant un déterminant de Vandermonde. La famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est donc une base de $\mathbb{C}^n$ ce qui prouve que M est cyclique. Autrement dit, on a

$$\mathscr{D}_n^s(\mathbb{C}) \subset \mathscr{C}_n(\mathbb{C})$$

Comme l'ensemble $\mathscr{D}_n^s(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (vu en TD), la densité de $\mathscr{C}_n(\mathbb{C})$ en résulte. Enfin, on a

$$\mathrm{A} \in \mathscr{C}_n(\mathbb{C}) \iff \exists (\mathrm{P}, a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \quad | \quad \mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{C}(a_0, \ldots, a_{n-1})\mathrm{P}^{-1}$$

où $\mathrm{C}(a_0, \ldots, a_n)$ désigne la matrice compagne du polynôme $\mathrm{X}^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k$. Il suffit en effet de considérer $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à A avec $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathscr{L} = (x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de $\mathbb{C}^n$ et d'écrire $\mathrm{mat}_{\mathscr{L}} u$. Ainsi, posant

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ (\mathrm{P}, a_0, \ldots, a_{n-1}) & \longmapsto & \mathrm{P}^{-1}\mathrm{C}(a_0, \ldots, a_{n-1})\mathrm{P} \end{array} \right.$$

On a
$$\Psi(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n) = \mathscr{C}_n(\mathbb{C})$$

C'est l'image d'un produit de deux connexes par arcs par une application continue. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathscr{C}_n(\mathbb{C}) \text{ est un ouvert dense connexe par arcs de } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).}$$