ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

# Feuille d'exercices n°31

## Exercice 1 (*)

L'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \{\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det \mathrm{M} = 1\}$ est-il compact ?

## Exercice 2 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et K un compact et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.

1. Montrer que si F est un compact, alors $\mathrm{F} + \mathrm{K}$ est un compact.
2. Montrer que si F est fermé, alors $\mathrm{F} + \mathrm{K}$ est un fermé.

## Exercice 3 (*)

Soit $\mathrm{A} = \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant 1\right\}$. L'ensemble A est-il compact ? Connexe par arcs ?

## Exercice 4 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{P}$ l'ensemble des matrices de projection de E. L'ensemble $\mathscr{P}$ est-il fermé ? Compact ? Connexe par arcs ?

## Exercice 5 (*)

L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est-il connexe par arcs ?

## Exercice 6 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et A, B des compacts de E. Montrer que $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ est compact.

## Exercice 7 (*)

Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}$ des evn et $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$ des parties connexes par arc.

1. Montrer que $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ est connexe par arcs.
2. On suppose $\mathrm{E} = \mathrm{F}$. Montrer que $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ est connexe par arcs.

## Exercice 8 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn, F un fermé et K un compact non vides et disjoints. On note

$$\mathrm{d}(\mathrm{K}, \mathrm{F}) = \operatorname*{Inf}_{(x,y) \in \mathrm{K} \times \mathrm{F}} \|x - y\|$$

Montrer $\mathrm{d}(\mathrm{F}, \mathrm{K}) > 0$.

## Exercice 9 (**)

Soit $\mathrm{E}$ un $\mathbb{K}$-evn. Montrer que si $\mathrm{S}(0,1)$ est compacte, alors $\mathrm{B}_f(0,1)$ l'est aussi.

## Exercice 10 (**)

Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}$ des evn, $f \in \mathscr{C}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $(\mathrm{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts de $\mathrm{E}$.

Montrer que
$$f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(\mathrm{K}_n)$$

## Exercice 11 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}([\,0\,;2\pi\,], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. Montrer que la boule unité fermée n'est pas compacte. On pourra considérer la suite $(f_n)_n$ avec $f_n : t \mapsto \cos(nt)$.

## Exercice 12 (**)

Soit $\mathrm{E}$ un $\mathbb{K}$-evn, $\mathrm{U}$ un ouvert et $\mathrm{K}$ un compact avec $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que
$$\forall x \in \mathrm{K} \qquad \mathrm{B}(x, r) \subset \mathrm{U}$$

## Exercice 13 (**)

Soit $\mathrm{E}$ un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie $n \geqslant 2$ ou infinie. Montrer que la sphère unité est connexe par arcs.

## Exercice 14 (**)

Soit $\mathrm{I}$ intervalle de $\mathbb{R}$ non vide non réduit à un point et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que $f$ est strictement monotone.