ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°32

Exercice 1 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$ son graphe.

1. Montrer que si f est continue, alors Γ_f est fermé.
2. Montrer que si f est bornée et Γ_f fermé, alors f est continue.
3. Le résultat précédent a-t-il lieu sans l'hypothèse f bornée ?

Exercice 2 (***)

Soit $f :]\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.

Exercice 3 (***)

Soit $(u_n)_n$ suite réelle bornée telle que $u_n + \dfrac{1}{2}u_{n+1} = a_n$ avec $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et F un sev de dimension finie de E. Montrer

$$\forall x \in \mathrm{E} \quad \exists y \in \mathrm{F} \quad | \quad \mathrm{d}(x, \mathrm{F}) = \|x - y\|$$

Exercice 5 (***)

Soit E un evn, X une partie compacte non vide de E et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{X}^2 \quad \text{avec} \quad x \neq y \qquad \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe α (considérer $\operatorname*{Inf}_{x\in\mathrm{X}} \|x - f(x)\|$).
2. Soit $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in \mathrm{X}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Montrer que $(u_n)_n$ converge vers α.

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn, K un compact convexe non vide et $f : \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ une application 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 7 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il y a équivalence entre

1. L'image réciproque par f de tout compact de $\mathbb{R}$ est un compact de $\mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = \lim\limits_{x\to-\infty} |f(x)| = +\infty$

Exercice 8 (***)

1. Soit $z \in \mathbb{U}$. Montrer que 1 est valeur d'adhérence de la suite $(z^n)_n$.
2. Soit $(z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{U}^p$. Montrer que p est valeur d'adhérence de la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{p} z_k^n\right)_n$.

Exercice 9 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev normé de dimension finie et U un ouvert de E. Montrer que U peut s'écrire comme une union croissante de compacts.

Exercice 10 (***)

Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 11 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie et $f \in \mathscr{C}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$ telle que $f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$. Montrer que f admet un minimum global.

Exercice 12 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn, K un compact convexe non vide et $u \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E})$ tel que $u(\mathrm{K}) \subset \mathrm{K}$. On note $\mathrm{C} = (\mathrm{id} - u)(\mathrm{K})$ puis on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k \quad \text{et} \quad x_n = (\mathrm{id} - u) \circ u_n(a) \quad \text{avec} \quad a \in \mathrm{K}$$

1. Montrer que C est un compact.
2. Montrer que $(x_n)_n \in \mathrm{C}^{\mathbb{N}}$ puis $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.
3. En déduire que u admet un point fixe dans K.

Exercice 13 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn.

1. Soit $(x_n)_n$ suite à valeurs dans E pour laquelle il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \qquad n \neq p \quad \Longrightarrow \quad \|x_n - x_p\| \geqslant \varepsilon$$
Montrer que $(x_n)_n$ n'admet aucune sous-suite convergente.
2. Soit K un compact de E. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier p non nul et $x_1, \ldots, x_p$ dans E tels que
$$\mathrm{K} \subset \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$$

Exercice 14 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn. Montrer que si la sphère unité $\mathrm{S}(0, 1)$ est compacte, alors E est de dimension finie.