ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°33

Exercice 1 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $(\mathrm{A}^p)_p$ bornée. Pour p entier non nul, on pose $\mathrm{B}_p = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{A}^k$.

1. Montrer que la suite $(\mathrm{B}_p)_{p\geqslant 1}$ admet une valeur d'adhérence B.
2. Montrer que B vérifie $\mathrm{B}(\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) = 0$.
3. En déduire B est une matrice de projection sur $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$.
4. Conclure sur le comportement asymptotique de $(\mathrm{B}_p)_{p\geqslant 1}$.

Indications : 1. Observer que la suite $(\mathrm{B}_p)_{p\geqslant 1}$ est bornée.
2. Pour p entier non nul, calculer $\mathrm{B}_p(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})$ et en déduire la limite de $(\mathrm{B}_p(\mathrm{I}_n - \mathrm{A}))_{p\geqslant 1}$.

3. Établir
$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) \oplus \mathrm{Im}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$$
On pourra considérer $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) \cap \mathrm{Im}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$ puis calculer $\mathrm{B}_{\varphi(p)}\mathrm{X}$ et faire tendre $p \to +\infty$.

En déduire $$\mathrm{Ker}\,\mathrm{B} = \mathrm{Im}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\,(\mathrm{B}-\mathrm{I}_n) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$$
4. Observer que la suite $(\mathrm{B}_p)_{p\geqslant 1}$ admet une unique valeur d'adhérence.

Exercice 2 (***)

Soit F une partie finie de $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{C} \smallsetminus \mathrm{F}$ est connexe par arcs.

Indications : Pour $\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_n$ des points du plan $\mathbb{R}^2$ et A, B dans $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_n\}$, montrer qu'il existe des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ qu'on peut choisir normés tels que les droites $\mathrm{A}+\mathbb{R}\overrightarrow{u}$ et $\mathrm{B}+\overrightarrow{v}$ soient sécantes en un point C et ne rencontrent aucun des M_i.

Exercice 3 (***)

Soit E un evn, X une partie compacte non vide de E et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ telle que
$$\forall (x,y) \in \mathrm{X}^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$$

1. Soit $a \in \mathrm{X}$. Montrer que a est valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Montrer que f est une isométrie, *i.e.*
$$\forall (x,y) \in \mathrm{X}^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$
3. Montrer que f est une bijection de X sur X.

Indications : 1. Minorer $\|f^k(x) - f^k(y)\|$ pour $(x,y) \in \mathrm{X}^2$ puis considérer $\|u_{\varphi(n+1)-\varphi(n)} - u_0\|$ avec φ extractrice.
2. Pour $(a,b) \in \mathrm{X}^2$, utiliser des suites construites comme précédemment.
3. Montrer $\mathrm{X} = \overline{f(\mathrm{X})} = f(\mathrm{X})$.

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn, K un compact convexe non vide et $u \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E})$ tel que $u(\mathrm{K}) \subset \mathrm{K}$. On note $\mathrm{C} = (\mathrm{id} - u)(\mathrm{K})$ puis on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k \quad \text{et} \quad x_n = (\mathrm{id} - u) \circ u_n(a) \quad \text{avec} \quad a \in \mathrm{K}$$

1. Montrer que C est un compact.
2. Montrer que $(x_n)_n \in \mathrm{C}^{\mathbb{N}}$ puis $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
3. En déduire que u admet un point fixe dans K.

Indications : 2. Invoquer la convexité de K puis simplifier l'expression de x_n et remarquer que K est borné.
3. Utiliser la fermeture de C.

Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On rappelle que pour $\mathrm{X} \subset \mathrm{E}$, l'enveloppe convexe de X notée Conv(X) vérifie

$$\mathrm{Conv}(\mathrm{X}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, n \geqslant 1, (x_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} \in \mathrm{X}^n, (\alpha_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} \in \mathbb{R}_+^n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

Si E est de dimension n, alors tout élément de Conv(X) peut s'écrire comme combinaison convexe de $n+1$ éléments de X (théorème de Carathéodory, voir feuilles de convexité). Montrer que dans ce cas, si X est compact, alors Conv(X) est compact.

Indications : Considérer $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathrm{E}^{n+1} \to \mathrm{E}, (\alpha, x) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i$ et K l'ensemble des $n+1$-uplets de réels positifs dont la somme vaut 1.

Exercice 6 (***)

Une matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *cyclique* s'il existe $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que

$$\mathrm{Vect}\,(\mathrm{X}, \mathrm{AX}, \ldots, \mathrm{A}^{n-1}\mathrm{X}) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$$

Montrer que l'ensemble des matrices cycliques $\mathscr{C}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense connexe par arcs.

Indications : Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{C}_n(\mathbb{C})$, considérer $\Phi : \mathrm{M} \mapsto \det(\mathrm{X}, \mathrm{MX}, \ldots, \mathrm{M}^{n-1}\mathrm{X})$. Pour $\mathrm{M} \in \mathscr{D}_n^s(\mathbb{C})$ matrice diagonalisable à valeurs propres simples, montrer que M est cyclique puis utiliser la densité de $\mathscr{D}_n^s(\mathbb{C})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Remarquer enfin que A est cyclique si et seulement elle est semblable à une matrice compagne.