TD+ 01 - corrigé

Intégrales à paramètres

Exercice 1.

1. Soit v intégrable continue, M un majorant de $|u|$. Alors $|uv| \leqslant M|v|$ donc $\boxed{uv \text{ est intégrable}}$.
2. Supposons que u ne soit pas bornée sur $\mathbb{R}$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$. Il existe I_k un intervalle sur lequel $|u|$ est supérieure ou égal à k. On peut de plus supposer les I_k disjoints. Pour tout k dans $\mathbb{N}$, notons α_k la largeur de I_k.
   Soit v une fonction égale à un triangle culminant en $\dfrac{2}{k^2\alpha_k}$ au milieu de I_k, nulle ailleurs. Alors v est intégrable, car la série des aires des triangles est la série convergente $\sum \dfrac{1}{k^2}$.
   En revanche, $\boxed{uv \text{ ne l'est pas}}$ car $|uv|$ est supérieur à $\dfrac{2}{\alpha_k k}$ sur I_k, et la série $\sum \dfrac{1}{k}$ diverge.
3. Posons $v(t) = \dfrac{u(t)}{|u(t)| + \mathrm{e}^{-|t|}}$. On a bien v continue et bornée par 1 et -1 car : $\forall t \in \mathbb{R}$, $|u(t)| \leqslant |u(t)| + \mathrm{e}^{-|t|}$.
   On a alors par hypothèse $uv : t \mapsto \dfrac{|u(t)|^2}{|u(t)| + \mathrm{e}^{-|t|}}$ intégrable.
   De plus, $|u(t)| - u(t)v(t) = \dfrac{|u(t)|\mathrm{e}^{-|t|}}{|u(t)| + \mathrm{e}^{-|t|}} \leqslant \mathrm{e}^{-|t|}$ est intégrable, donc $|u|$ aussi.

Exercice 2.

1. Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. Alors on peut démontrer par récurrence que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$ où P_n est un polynôme. Si $k \in \mathbb{N}$, alors $x^k P_n(x) f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.
   Donc $\boxed{f \in \mathscr{S}}$.
   On utilisera dans tout l'exercice que si $f \in \mathscr{S}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^k f^{(n)}$ est dans $\mathscr{S}$. En effet, cette fonction est $\mathscr{C}^\infty$, et ses dérivées successives sont des sommes de fonctions du type $x \mapsto x^\ell f^{(p)}(x)$, qui multipliées par n'importe quelle puissance de x tendent bien vers 0 en $\pm\infty$.
2. — On montre déjà que $\hat{f}$ est $\mathscr{C}^\infty$. Posons $g : (x,\xi) \mapsto f(x)\,\mathrm{e}^{-ix\xi}$.
   Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors pour tout ℓ dans $[\![0,n]\!]$, $\dfrac{\partial^\ell g}{\partial \xi^\ell} = (-i)^\ell x^\ell g(x,\xi)$. Donc
   - — pour tout ℓ de $[\![0,n-1]\!]$, $\dfrac{\partial^\ell g}{\partial \xi^\ell}$ est intégrable (car, comme $f \in \mathscr{S}$, $x^2(-i)^\ell x^\ell f(x,\xi) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc g est intégrable par règle de Riemann)
   - — $x \mapsto \dfrac{\partial^n g}{\partial \xi^n}$ est continue par morceaux.
   - — $\xi \mapsto \dfrac{\partial^n g}{\partial \xi^n}$ est continue.
   - — pour tous x et ξ dans $\mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial^n g}{\partial \xi^n}\right| \leqslant |f(x)x^n|$, intégrable pour la même raison que ci-dessus.

   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\hat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^n$, et donc $\hat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

   — On montre ensuite que toutes les dérivées de $\hat{f}$ décroissent plus vite que toutes les puissances de ξ.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$. On a $\hat{f}^{(n)}(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} (-ix)^n f(x) e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x$. On pose $g(x) = (-i)^n x^n f(x)$. Cette fonction est dans $\mathscr{S}$ d'après la remarque de début d'exercice. Par intégration par parties on a de plus :
$$\xi^k \hat{f}^{(n)}(\xi) = \xi^k \left[g(x)\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\right]_{\mathbb{R}} + \frac{\xi^k}{i\xi}\int_{\mathbb{R}} g'(x)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x$$
   Le crochet est nul car $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |g(x)| = 0$. En intégrant $k+1$ fois par parties, on en déduit :
$$\xi^k \hat{f}^{(n)}(\xi) = \frac{\xi^k}{i^{k+1}\xi^{k+1}}\int_{\mathbb{R}} g^{(k+1)}(x)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{i^{k+1}\xi}\int_{\mathbb{R}} g^{(k+1)}(x)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x \underset{\xi\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$$
   On en déduit que $\boxed{\hat{f} \text{ est dans } \mathscr{S}}$.
3. (a) On a $\hat{G}(0) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\sqrt{2\pi}}$.
   (b) Si $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{G}'(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} (-ix)\,\mathrm{e}^{-ix\xi}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.
   Effectuons une IPP avec $u(x) = i\,\mathrm{e}^{-ix\xi}$ et $v'(x) = x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. Alors $u'(x) = \xi\,\mathrm{e}^{-ix\xi}$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, et le crochet est nul, d'où : $\hat{G}'(\xi) = -\xi\hat{G}(\xi)$.
   On a donc en résolvant l'équation différentielle : $\hat{G}(\xi) = A\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}$ avec $A \in \mathbb{C}$. De plus, $\hat{G}(0) = \sqrt{2\pi}$, donc on a bien $\boxed{\hat{G} = \sqrt{2\pi}G}$.
4. Il suffit de remarquer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f(t)g(x-t)| \leqslant K|f(t)|$ avec $|f|$ intégrable.
5. Faire le changement de variables $u = x - t$.
6. Soient f et g dans $\mathscr{S}$. Alors la dérivabilité de $f * g$ n'est pas compliquée, et $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2$,
$$\begin{aligned}
x^k (f*g)^{(n)}(x) &= \int_{\mathbb{R}} x^k f(t) g^{(n)}(x-t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} (x-t+t)^k f(t) g^{(n)}(x-t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} t^i f(t)(x-t)^{k-i} g^{(n)}(x-t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$
   qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ par double limite (la domination vient du fait que f et g sont toutes deux dans $\mathscr{S}$).
7. Soit ξ dans $\mathbb{R}$. Alors, comme $f * g$ est intégrable, $\widehat{f*g}$ existe et
$$\begin{aligned}
\widehat{f*g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(x)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t\, e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \text{ en s'autorisant à permuter les intégrales} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\xi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)e^{-i(x-t)\xi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

D'où, en posant $y=x-t$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)e^{-i(x-t)\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-iy\xi}\,\mathrm{d}y = \hat{g}(y)$,

soit $\widehat{f*g}(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\xi}\hat{g}(\xi)\,\mathrm{d}t = \hat{g}(\xi)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\xi}\,\mathrm{d}t = \boxed{\hat{g}(\xi)\hat{f}(\xi)}$.

Exercice 3.

1. La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}_+$ donc, pour tout $p>0$, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $|e^{-pt}f(t)|\leqslant Me^{-pt}$, intégrale sur $\mathbb{R}_+$. Donc la fonction $t\mapsto e^{-pt}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   De plus, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p}$, donc :
   $$p\cdot\mathscr{L}(f)(p)-\ell \;=\; p\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\,\mathrm{d}t - p\ell\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^{+\infty} pe^{-pt}\big(f(t)-\ell\big)\,\mathrm{d}t\,.$$
   Soit M un majorant de $|f(t)-\ell|$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $A>0$, on peut alors écrire
   $$\begin{aligned}|p\cdot\mathscr{L}(f)(p)-\ell| &\leqslant \left|\int_0^{A} pe^{-pt}\big(f(t)-\ell\big)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_A^{+\infty} pe^{-pt}\big(f(t)-\ell\big)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant M\int_0^{A} pe^{-pt}\,\mathrm{d}t + \int_A^{+\infty} pe^{-pt}|f(t)-\ell|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
   Soit $\varepsilon>0$. Soit A tel que $|f(t)-\ell|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ pour $t\geqslant A$, donc la deuxième intégrale inférieure à $\dfrac{\varepsilon}{2}$.
   Comme $\displaystyle\int_0^{A} pe^{-pt}\,\mathrm{d}t = 1-e^{-pA}\underset{p\to 0}{\longrightarrow}0$, on peut rendre la première intégrale inférieure à $\dfrac{\varepsilon}{2}$ en prenant p suffisamment petit. Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{p\to 0^+}\big(p\cdot\mathscr{L}(f)(p)-l\big)=0}$.
2. Soit F la primitive de f qui s'annule en 0. F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et admet une limite finie en $+\infty$, donc est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $p>0$, la fonction $t\mapsto F(t)e^{-pt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}F(t)e^{-pt}=0$, d'où, par IPP :
   $$\forall p\in\mathbb{R}_+^*\qquad \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = p\cdot\int_0^{+\infty} F(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t\,.$$
   La transformée de Laplace $\mathscr{L}(f)$ est donc définie sur $\mathbb{R}_+$ et : $\boxed{\forall p\in\mathbb{R}_+^*\ \mathscr{L}(f)(p)=p\cdot\mathscr{L}(F)(p)}$.
   La transformée $\mathscr{L}(F)$, définie $\mathbb{R}_+^*$, est continue sur cet intervalle : en effet, si on fixe $p_0>0$, la fonction $t\mapsto F(t)e^{-p_0t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et une domination évidente montre la continuité de $\mathscr{L}(F)$ sur l'intervalle $[p_0,+\infty[$. Par (1), on déduit la continuité de $\mathscr{L}(f)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, d'après 1. pour F :
   $$\mathscr{L}(f)(0)=\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{+\infty}F = \lim_{p\to 0^+} p\cdot\mathscr{L}(F)(p) = \lim_{p\to 0^+}\mathscr{L}(f)(p)$$
   donc $\boxed{\mathscr{L}(f)\text{ est continue en }0}$.
3. Vous avez vu que cette intégrale convergeait. Appliquons alors **2.** à $f: t\mapsto\dfrac{\sin t}{t}$, prolongée par continuité en zéro : sa transformée de Laplace est donc définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
   Posons $g=\mathscr{L}(f)$ et $h:(p,t)\mapsto e^{-pt}f(t)$.
   On a $\dfrac{\partial h}{\partial p}(p,t) = -e^{-pt}\sin t$ et, si $a>0$, la majoration $\left|\dfrac{\partial h}{\partial p}(p,t)\right|\leqslant e^{-at}$, valable pour $(p,t)\in[a,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*$, prouve que la fonction $g=\mathscr{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$, avec
   $$g'(p) = -\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{1+p^2}\,,$$
   en effectuant deux IPP. Donc il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que $g(p)=C-\arctan p$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   De plus, $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} e^{-pt}\frac{\sin(t)}{t}=0$, et $\forall p\geqslant a,\forall t\in\mathbb{R}_+, \left|e^{-pt}f(t)\right|\leqslant e^{-at}f(t)$ intégrable.
   D'après le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}g(p)=0$, donc $C=\dfrac{\pi}{2}$ et
   $$\forall p\in\mathbb{R}_+^*, g(p)=\mathscr{L}(f)(p)=\frac{\pi}{2}-\arctan p\,.$$
   Or, $\mathscr{L}(f)$ est continue en 0 donc : $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \mathscr{L}(f)(0) = \lim_{p\to 0^+}\mathscr{L}(f)(p) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 4.

1. Soit $t\geqslant t_0$. Alors
   $$\left|\mathrm{e}^{-t\varphi(x)}f(x)\right| = \mathrm{e}^{-(t-t_0)\varphi(x)}\left|f(x)\,\mathrm{e}^{-t_0\varphi(x)}f(x)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-(t-t_0)\varphi(0)}\left|f(x)\,\mathrm{e}^{-t_0\varphi(x)}f(x)\right|,$$
   car φ est croissante. Comme $x\mapsto\left|f(x)\,\mathrm{e}^{-t_0\varphi(x)}f(x)\right|$ est intégrable, $x\mapsto\mathrm{e}^{-t\varphi(x)}f(x)$ est intégrale.
   Donc $\boxed{F\text{ est définie dès que }t\geqslant t_0}$.
2. On se ramène à $t_0=0$ par la translation $t-t_0$. Ainsi on suppose simplement que f est intégrable.
   (a) Soit α dans $]0,+\infty[$. Alors pour tout $t\geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-t\varphi(x)}\leqslant\mathrm{e}^{-t\varphi(\alpha)}$ par croissance de φ. Alors $\left|\mathrm{e}^{-t\varphi(x)}f(x)\right|\leqslant\left|f(x)\right|$, d'où, en intégrant et par intégrabilité de f,
   $$\left|t\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{e}^{-t\varphi(x)}f(x)dx\right|\leqslant t\int_\alpha^{+\infty}\left|\mathrm{e}^{-t\varphi(x)}f(x)\right|dx\leqslant t\,\mathrm{e}^{-t\varphi(\alpha)}\int_\alpha^{+\infty}\left|f(x)\right|dx\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$
   car $\alpha>0$.
   (b) Effectuons le changement de variables $y=tx$. Alors
   $$\int_0^{\alpha}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{t\alpha}\mathrm{e}^{-y}f\left(\frac{y}{t}\right)\frac{\mathrm{d}y}{t} = \frac{1}{t}\int_0^{t\alpha}\mathrm{e}^{-y}f\left(\frac{y}{t}\right)\mathrm{d}y\,.$$
   Reste à montrer que $\displaystyle\int_0^{t\alpha}\mathrm{e}^{-y}f\left(\frac{y}{t}\right)\mathrm{d}y$ tend vers $f(0)$ quand t tend vers $+\infty$. Déjà,
   $$\int_0^{t\alpha}\mathrm{e}^{-y}f\left(\frac{y}{t}\right)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathbf{1}_{y\leqslant t\alpha}f\left(\frac{y}{t}\right)\mathrm{d}y\,.$$
   Or, $y\mapsto\mathbf{1}_{y\leqslant t\alpha}f\left(\dfrac{y}{t}\right)$ tend vers $f(0)$ quand t tend vers $+\infty$, et $\left|\mathrm{e}^{-y}\mathbf{1}_{y\leqslant t\alpha}f\left(\dfrac{y}{t}\right)\right|\leqslant K\mathrm{e}^{-y}$, où K est une borne de f sur $[0,\alpha]$. Donc, par convergence dominée,
   $$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathbf{1}_{y\leqslant t\alpha}f\left(\frac{y}{t}\right)\mathrm{d}y\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}f(0)\,\mathrm{d}y = f(0).$$
   On en déduit, comme on a supposé que $f(0)\neq 0$, que $\boxed{\displaystyle\int_0^{\alpha}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\,\mathrm{d}x\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{f(0)}{t}}$.
   (c) On a : $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{e}^{-t\varphi(x)}f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\alpha}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^{+\infty}\mathrm{e}^{-t\varphi(x)}f(x)\,\mathrm{d}x\,.$
   Or d'après le a), on a $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{e}^{-t\varphi(x)}f(x)\,\mathrm{d}x = o\left(\frac{1}{t}\right)$. Donc d'après la question b), $\boxed{F(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{f(0)}{t}}$.

3. On pose le changement de variables $y=\varphi(x)$. Comme φ est strictement croissante, tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vérifie $\varphi(0)=0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires monotone, φ est une bijection $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, dont la dérivée ne s'annule pas, donc sa bijection réciproque est aussi $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Donc, si l'on applique la formule de changement de variables :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ty} f\circ\varphi^{-1}(y)\frac{\mathrm{d}y}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}.$$

D'où, en appliquant le résultat précédent à la fonction $y\mapsto f\circ\varphi^{-1}(y)\dfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ty} f\circ\varphi^{-1}(y)\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{f(\varphi^{-1}(0))}{\varphi'(\varphi^{-1}(0))\,t} = \boxed{\frac{f(0)}{\varphi'(0)\,t}}$$

4. Si $\alpha>0$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx^2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\alpha} \mathrm{e}^{-tx^2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\alpha}^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx^2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   On va montrer que la seconde intégrale est négligeable devant $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et la première correspond à l'équivalent qui nous intéresse. Déjà,

$$\left|\sqrt{t}\int_{\alpha}^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx^2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t\alpha^2}\int_0^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Ensuite,

$$\sqrt{t}\int_0^{\alpha} \mathrm{e}^{-tx^2} f(x)\,\mathrm{d}x \underset{y=\sqrt{t}x}{=} \int_0^{\alpha\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-y^2} f\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}u \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2} f(0)\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0).$$

   D'où le résultat par le même raisonnement qu'en 2.

5. L'idée est encore de se ramener au cas précédent. Comme $\varphi'>0$ et $\varphi(0)=0$, $\varphi>0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\psi=\sqrt{\varphi}$ est $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Reste à voir la dérivabilité en 0 :

$$\sqrt{\varphi(x)} = \sqrt{\varphi''(0)\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \sqrt{\frac{\varphi''(0)}{2}}\,x + o(x),$$

   d'où la dérivabilité en 0, avec $\psi'(0)=\sqrt{\dfrac{\varphi''(0)}{2}}$.
   On pose alors $y=\psi(x)$. Alors le changement de variable dans l'intégrale donne

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ty^2} f\circ\psi^{-1}(y)\frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(y))}\,\mathrm{d}y \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}\frac{f\circ\psi^{-1}(0)}{\psi'(0)} = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2t}}\frac{f(0)}{\sqrt{\varphi''(0)}}},$$