FORMULAIRE D’ANALYSE VECTORIELLE

I Champs de vecteurs et champs scalaires

1. Définition d’un champ de vecteurs

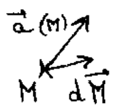
C’est une application qui, à tout point M(x,y,z) associe un vecteur $\vec{a}(x,y,z)$

Définition d’une ligne de champ : C’est une ligne tangente en chacun de ses points au vecteur champ

2. Circulation du vecteur champ

Circulation élémentaire : $\delta.C = \vec{a}(M) \bullet d\vec{M}$

Ce n’est pas à priori la différentielle d’une fonction

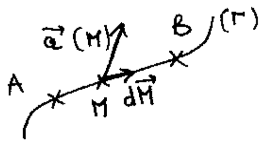


en coordonnées cartésiennes $\delta C = a_x dx + a_y dy + a_z dz$

en coordonnées cylindriques $\delta C = a_r dr + a_\theta r d\theta + a_z dz$

en coordonnées sphériques $\delta C = a_r dr + a_\theta r d\theta + a_\varphi r \sin\theta . d\varphi$

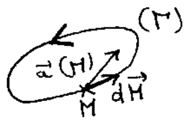
Circulation entre deux points le long d’un trajet :



$C_A^B = \int_A^B \delta C = \int_A^B \vec{a}(M) \bullet d\vec{M}$

Dépend à priori du chemin suivi

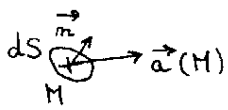
Circulation le long d’un contour fermé : $C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{a}(M) \bullet d\vec{M}$



Il faut choisir un sens d’orientation du contour, il détermine le signe de C_Γ

3. Flux du vecteur champ

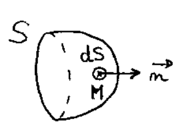
Flux à travers une surface élémentaire orientée :



On oriente dS par le choix de la normale $\vec{n}$

Flux élémentaire de $\vec{a}$ à travers dS : $d\Phi = \vec{a}(M) \bullet \vec{n}(M) dS$

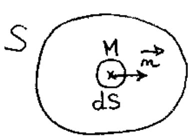
Flux à travers une surface orientée :



$\Phi = \iint_S d\Phi = \iint_S \vec{a}(M) \bullet \vec{n}(M) dS$

2 signes possibles suivant l’orientation de S

Flux à travers une surface fermée :



On choisit obligatoirement la normale sortant de la surface

$\Phi = \oiint_S d\Phi = \oiint_S \vec{a}(M) \bullet \vec{n}(M) dS$

4. Définition d’un champ scalaire

C’est une application V qui, à tout point M(x,y,z) de l’espace associe un réel V(x,y,z).

II. Opérateurs différentiels

1. Définition en coordonnées cartésiennes :

Le gradient : Il associe un champ de vecteurs à un champ scalaire

$$gr\vec{a}d(V) = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$$

La divergence : Elle associe un champ de scalaires à un champ de vecteurs

$$div(\vec{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad \text{où} \quad \vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

Le rotationnel : Il associe un champ de vecteurs à un champ de vecteurs

$$r\vec{o}t(\vec{a}) = \left| \begin{array}{c} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{c} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} \dfrac{\partial a_z}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial a_x}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y} \end{array} \right.$$

Le Laplacien : Il agit soit sur un champ scalaire soit sur un champ de vecteurs

Laplacien scalaire $\Delta V = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

Laplacien vecteur $\vec{\Delta}\vec{a} = \left| \begin{array}{l} \Delta a_x \\ \Delta a_y \\ \Delta a_z \end{array} \right.$

2. En coordonnées cylindriques :

$$gr\vec{a}d(V) = \left| \begin{array}{c} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{array} \right. \qquad r\vec{o}t(\vec{a}) = \left| \begin{array}{c} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial a_r}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

$$div(\vec{a}) = \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Laplacien scalaire : $\Delta V = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r \dfrac{\partial V}{\partial r} \right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

Laplacien vecteur : $\vec{\Delta}\vec{a} = \left| \begin{array}{l} \Delta a_r - \dfrac{a_r}{r^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial a_\theta}{\partial \theta} \\ \Delta a_\theta - \dfrac{a_\theta}{r^2} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial a_r}{\partial \theta} \\ \Delta a_z \end{array} \right.$

3. En coordonnées sphériques :

$$\vec{grad}(V) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\[2mm] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\[2mm] \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \end{array} \right. \qquad \vec{rot}(\vec{a}) \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial(\sin\theta\, a_\varphi)}{\partial \theta} - \dfrac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}\right] \\[2mm] \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r}\right] \\[2mm] \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial a_r}{\partial \theta}\right] \end{array} \right.$$

$$div(\vec{a}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, a_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}$$

Laplacien scalaire :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta.\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}$$
$$= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta.\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}$$

Laplacien vecteur :

$$\vec{\Delta}\vec{a} = \left| \begin{array}{l} \Delta a_r - \dfrac{2a_r}{r^2} - \dfrac{2}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(a_\theta\sin\theta) - \dfrac{2}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} \\[2mm] \Delta.a_\theta - \dfrac{a_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \dfrac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial a_r}{\partial\theta} \\[2mm] \Delta.a_\varphi - \dfrac{a_\varphi}{r^2\sin^2\theta} + \dfrac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} + \dfrac{2}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial a_r}{\partial\varphi} \end{array} \right.$$

4. L'opérateur nabla :

$$\vec{\nabla} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x} \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial z} \end{array} \right.$$

Intérêt :

$$\vec{grad}(V) = \vec{\nabla}(V)$$
$$div(\vec{a}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{a}$$
$$\vec{rot}(\vec{a}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{a}$$
$$\Delta(V) = (\vec{\nabla})^2 V$$

Inconvénients :
- Ne « marche » qu'en coordonnées cartésiennes
- Danger : $\vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla} \bullet \vec{a}$? $\quad \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \bullet \vec{a}) = \vec{grad}(div(\vec{a}))$

$$(\vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla})(\vec{a}) = \vec{\Delta}(\vec{a})$$

III. Théorèmes fondamentaux

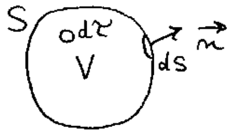
1. Théorème de Stokes

La circulation d'un vecteur $\vec{a}$ le long d'un contour fermé C est égale au flux de son rotationnel à travers toute surface S s'appuyant sur C et orientée par C (Le sens choisi pour orienter C détermine le sens de la normale à S).

$$\oint_C \vec{a} \bullet d\vec{M} = \iint_S \vec{rot}(\vec{a}) \bullet \vec{n} dS$$

2. Théorème d'Ostrogradski

Le flux d'un champ de vecteurs $\vec{a}$ à travers une surface fermée S est égale à l'intégrale de $div(\vec{a})$ sur le volume V limité par S.



$$\oiint_S \vec{a} \bullet \vec{n} dS = \iiint_V div(\vec{a}) dV$$

IV. Champ dérivant d'un potentiel scalaire

Def : Un champ de vecteurs $\vec{a}$ dérive d'un potentiel scalaire s'il existe un champ scalaire V tel que $\vec{a} = -gr\vec{a}d(V)$

Théorèmes : Un champ de vecteurs $\vec{a}$ dérive d'un potentiel scalaire ssi
$\exists V \,/\, \vec{a} = -gr\vec{a}d(V) \Leftrightarrow r\vec{o}t(\vec{a}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ est à circulation conservative ie $\forall C, \oint_C \vec{a} \bullet d\vec{M} = 0$

Dem partielle:

Propriétés :

* V n'est pas unique, il est défini à une constante près (puisque le gradient d'une constante est nul, V'=V+K convient quel que soit la constante K).

* $\delta.C = \vec{a}(M) \bullet d\vec{M} = -gr\vec{a}d(V) \bullet d\vec{M} = -dV$

d'où $C_A^B = V(A) - V(B)$, la circulation de $\vec{a}$ est indépendante du chemin suivi.

Exemple des forces conservatives :

V. Formulaire

A savoir :

$div(r\vec{o}t(\vec{a})) = 0$

$r\vec{o}t(gr\vec{a}d(V)) = \vec{0}$

$\vec{\Delta}\vec{a} = gr\vec{a}d(div(\vec{a})) - r\vec{o}t(r\vec{o}t(\vec{a}))$

$div(\overrightarrow{grad}(V)) = \Delta(V)$

Produit mixte : $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \bullet (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$

Double produit vectoriel : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \bullet \vec{c}).\vec{b} - (\vec{a} \bullet \vec{b}).\vec{c}$

Donnés :

$gr\vec{a}d(V.W) = V.gr\vec{a}d(W) + W.gr\vec{a}d(V)$

$div(V.\vec{a}) = V.div(\vec{a}) + \vec{a} \bullet gr\vec{a}d((V)$

$div(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \bullet r\vec{o}t(\vec{a}) - \vec{a} \bullet r\vec{o}t(\vec{b})$

$r\vec{o}t(V.\vec{a}) = V.r\vec{o}t(\vec{a}) + gr\vec{a}d(V) \wedge \vec{a}$