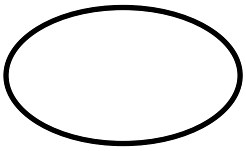
CH EM 4 - LES EQUATIONS DE MAXWELL

I. Conservation de la charge

1) Principe de conservation- Bilan de charges :

L'intensité I du courant sortant d'une surface fermée S est reliée à la charge Q contenue dans le volume enfermé par la surface S par la relation : $I = -\dfrac{dQ}{dt}$

Démo : Soit S une surface fermée délimitant un volume V fixe.
Soit Q(t) la charge contenue dans V à l'instant t
Q(t+dt) = Q(t) + dQ
dQ est



2) Forme locale : équation locale de conservation de la charge

$$\boxed{div(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

CE : Établir l'équation locale de conservation de la charge

Démo :

3) Loi des nœuds

En régime stationnaire $div(\vec{j}) = 0$ donc :

Donc $\vec{j}$ est à flux conservatif. On en déduit :

a) La loi des nœuds

Démo :

b) La conservation de l'intensité le long d'un circuit non bifurqué.

II. Les équations de Maxwell

1) Les postulats de l'électromagnétisme

- la loi de force de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

- les équations de Maxwell dans le vide : *(CE)*

(MT) $div(\vec{B}) = 0$ (Maxwell-Thomson)

(MG) $div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (Maxwell-Gauss)

(MF) $\overrightarrow{rot}\,(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Maxwell-Faraday)

(MA) $\overrightarrow{rot}\,(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (Maxwell-Ampère)

avec $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 uSI$ et $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$uSI

2) L'équation locale de conservation de la charge

$$\boxed{div(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

CE : Vérifier la cohérence des équations de Maxwell avec l'équation locale de la conservation de la charge.

Montrons que l'équation locale de conservation de la charge est contenue dans les équations de Maxwell :

CE : Citer, utiliser et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale :

3) L'équation de Maxwell-Thomson ou équation du flux magnétique

$$\boxed{div(\vec{B}) = 0}$$

Elle permet de montrer que $\vec{B}$ est à flux conservatif :

4) L'équation de Maxwell-Gauss

$$\boxed{div(\vec{E}) = \rho / \varepsilon_0}$$

Elle permet de montrer le théorème de Gauss :

5) L'équation de Maxwell-Faraday $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$

(CE) Associer l'équation de Maxwell-Faraday à la loi de Faraday.

Elle permet de montrer la loi de Faraday $e = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ donc elle rend compte des phénomènes d'induction. C'est admis.

Forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\oint_C \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_{S\ s'appuyant sur\ C} \vec{B}.\vec{n}dS\right) = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Démo dans le cas d'un circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps :

En régime variable $\vec{E}$ n'est plus à circulation conservative, donc $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ n'est plus valable.

Conséquence : Il y a couplage entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$: toute variation temporelle de $\vec{B}$ crée $\vec{E}$.

En régime variable, les sources de $\vec{E}$ sont les charges et les variations temporelles de $\vec{B}$.

6) L'équation de Maxwell-Ampère $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

En régime permanent elle permet de montrer le théorème d'Ampère.

En régime variable, le **théorème d'Ampère généralisé** : $\boxed{\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 i_{enlacé} + \mu_0 \iint \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS}$

$i_{enlacé}$ est appelé le vrai courant.

Définition **du courant de déplacement** : $i_D = \iint \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\vec{n}dS$

Définition de la **densité de courant de déplacement :** $\boxed{\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

Démo :

Conséquence : Il y a couplage entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$: toute variation temporelle de $\vec{E}$ crée $\vec{B}$.
En régime variable, les sources de $\vec{B}$ sont les vrais courants et les variations temporelles de $\vec{E}$ (courants de déplacement).

7) Couplage des champs électrique et magnétique :

CE : Associer le couplage spatio-temporel entre champ électrique et champ magnétique au phénomène de propagation. (à la possibilité de propagation du champ électromagnétique).
Voir l'établissement de l'équation de propagation à partir des équations de Maxwell aux Ch EM6,7,9.

8) Notions sur les milieux

Les équations de Maxwell écrites jusqu'ici ne sont valables que dans le vide.

Dans les milieux linéaires homogènes et isotropes (LHI) elles sont encore valables à condition de remplacer ε_0 par $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ et μ_0 par $\mu = \mu_0\mu_r$.
ε est la permittivité diélectrique du milieu, ε_0 est la permittivité diélectrique du vide, ε_r est la permittivité relative du milieu,
μ est la perméabilité magnétique du milieu, μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, μ_r est la perméabilité relative du milieu.

Exemples de milieux LHI :
- milieux diélectriques : ce sont les milieux dans lesquels $\mu = \mu_0$ et $\varepsilon_r \neq 1$

Ordres de grandeur : *Air :* $\varepsilon_r - 1 = 6.10^{-3}$
On dira que l'air a les propriétés électromagnétiques du vide.
Eau : en régime permanent $\varepsilon_r(eau)=84$,
dans le domaine optique $\varepsilon_r(eau)= n^2 = (1,33)^2$

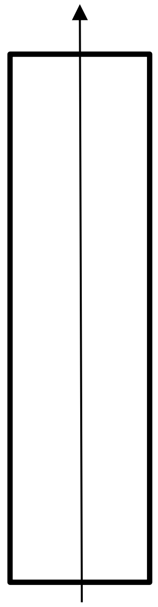
$\varepsilon_r(BaTiO_3)=1760$,

- milieux magnétiques : ce sont les milieux dans lesquels $\varepsilon = \varepsilon_0$ et $\mu_r \neq 1$

Ordres de grandeur : $\mu_r(acier)\approx 100$,
$\mu_r(fer\ pur)\approx 10^5$

9) <u>Changement de référentiel</u>

Le champ électromagnétique dépend du référentiel, montrons le sur un faisceau d'électrons :



Considérons un faisceau homocinétique d'électrons

III. Les équations locales de la magnétostatique et de l'électrostatique

1) Les équations de Maxwell en régime stationnaire :

(CE) Établir les lois locales des champs statiques à partir des équations de Maxwell.
Il y a découplage des champs électrique et magnétique en régime stationnaire. On peut calculer séparément $\vec{E}$ créé par les charges et $\vec{B}$ créé par les courants

Equations locales de l'électrostatique :

(MF) $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{0}}$ $\Rightarrow \vec{E}$ est à circulation conservative
et définition du potentiel V par $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ qui n'est valable qu'en électrostatique (pas en régime variable)

(MG) $\boxed{div(\vec{E}) = \rho / \varepsilon_0}$ $\Rightarrow$ le théorème de Gauss

Equations locales de la magnétostatique :
(MT) $\boxed{div(\vec{B}) = 0}$ $\Rightarrow \vec{B}$ est à flux conservatif
(MA) $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}}$ $\Rightarrow$ le théorème d'Ampère

2) Equations de Poisson et de Laplace de l'électrostatique

Définition de V (à une constante près): $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{0} \Leftrightarrow \exists V / \vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$

Puis $div(\vec{E}) = \rho / \varepsilon_0$ donne **l'équation de Poisson** : $\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

Démo :

Dans une région vide de charges, cette équation devient **l'équation de Laplace** : $\boxed{\Delta V = 0}$

(CE) Établir les équations de Poisson et de Laplace de l'électrostatique.
(CE) Exprimer par analogie les équations de Poisson et de Laplace dans le cas de la gravitation.

interaction électrostatique	interaction gravitationnelle
Champ électrostatique	Champ gravitationnel
Potentiel électrostatique	Potentiel gravitationnel
Charge volumique	Masse volumique
Constante	Constante
Equation de Poisson électrostatique	**Equation de Poisson gravitationnelle**

Exemple pour une masse ponctuelle m_O placée en O, elle crée sur la masse m_M en M :

IV. Les différents types de régimes

1) Régimes stationnaires ou permanents (indépendants du temps)

a) La loi des nœuds

L'équation locale de conservation de la charge en régime permanent $div(\vec{j}) = 0$ permet de montrer :
- que l'intensité du courant a même valeur en tout point d'un circuit non bifurqué
- et la loi des nœuds.

b) Les lois de l'électrostatique et de la magnétostatique

On peut alors calculer séparément les champs électriques créés par les charges et les champs magnétiques créés par les courants.

2) Approximation des régimes quasi-stationnaires (ou quasi-permanents) : l'ARQS

C'est l'étude des régimes lentement variables.

a) Les lois de Kirchhoff restent valables : la loi des nœuds et des mailles mais aussi toutes les lois de l'électrocinétique (capacités, bobines...)

b) Les équations de Maxwell dans l'ARQS magnétique

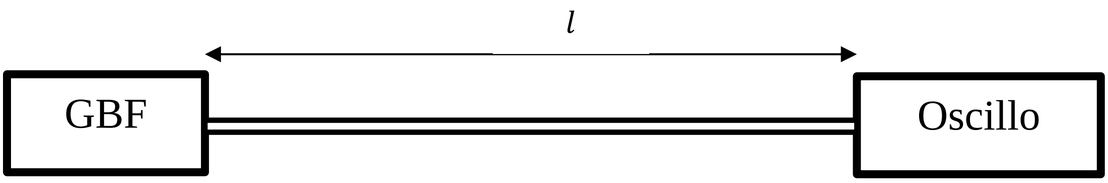
On néglige le courant de déplacement $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ donc le terme $\varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ **dans l'équation de Maxwell-Ampère**. Elle devient donc : (MA)

Mais l'équation de Maxwell-Faraday est inchangée.

Donc on tient compte des phénomènes d'induction mais on néglige la propagation du champ électromagnétique.

c) Domaine de validité de l'ARQS

On néglige le temps de propagation t = *l*/c devant la période T du signal électrique
ou la longueur l du circuit devant la longueur d'onde λ=c.T du signal
avec c la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques ($c=3.10^8$ $m.s^{-1}$ dans le vide).



AN : Quand on fait de l'électrocinétique au laboratoire f_{max} =

On peut donc appliquer l'ARQS si $l \ll$

On est dans le domaine de l'ARQS quand on fait de l'électrocinétique au laboratoire.

3) Régimes rapidement variables

Il faut tenir compte des phénomènes de propagation (on introduit alors des potentiels retardés au ChEM9 Rayonnement dipolaire électrique).

C'est le domaine des ondes électromagnétiques : ondes radio, radar, ondes lumineuses …

Ordres de grandeur : document « Spectre des ondes électromagnétiques ».

Visible : $\boxed{\lambda \in [0.4\mu m, 0.8\mu m]}$

radio FM : autour de f =