

SÉRIES ET FONCTIONS VECTORIELLES

B. Landelle

Table des matières

I	Séries vectorielles	2
1	Définitions, propriétés	2
2	Convergence absolue	4
3	Exemples importants	4
II	Dérivation	6
1	Définitions	6
2	Propriétés	7
III	Dérivations successives	9
1	Définitions	9
2	Propriétés	9
IV	Intégration sur un segment	10
1	Définitions	10
2	Propriétés	11
3	Intégrale fonction de sa borne supérieure	12
V	Formules de Taylor	13
1	Formule de Taylor avec reste intégral	13
2	Inégalité de Taylor-Lagrange	13
3	Formule de Taylor-Young	13

Dans ce chapitre, l'ensemble E désigne un \mathbb{K} -ev normé de dimension finie de base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$ et I un intervalle de \mathbb{R} non vide, non réduit à un point. Pour $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ et $f : I \rightarrow E$, on note $u_n = \sum_{i=1}^p u_{i,n} e_i$ et $f = \sum_{i=1}^p f_i e_i$ où les $(u_{i,n})_n$ et f_i sont respectivement suites et fonctions coordonnées.

Notations : Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$. On note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ si $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0_E$. L'expression $o(1)$ signifie ici une fonction de limite nulle dans E en a . Ainsi, la relation $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ équivaut à $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x)o(1)$.

I Séries vectorielles

1 Définitions, propriétés

Définition 1. Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_n$ que l'on note $\sum u_n$ ou $\sum_{n \geq 0} u_n$. On dit que S_n est la somme partielle d'indice n (ou d'ordre n) de la série $\sum u_n$.

Remarque : Pour une suite de terme général u_n définie à partir du rang n_0 , on définit la série à partir du même rang et on la note $\sum_{n \geq n_0} u_n = (S_n)_{n \geq n_0}$ avec $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$.

Définition 2. La série $\sum u_n$ à valeurs dans E est dite convergente (ou converge) si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge. Dans ce cas, la limite de $(S_n)_n$ est appelée somme de la série et notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. La série $\sum u_n$ est dite divergente (ou diverge) si la suite $(S_n)_n$ est divergente.

Remarques : 1. Pour une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ à valeurs dans E définie à partir du rang n_0 telle que $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge, la somme de la série est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$. On adapte de la même manière toutes les définitions et résultats qui suivent.

2. On a $\sum u_n$ converge $\iff \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad \sum u_{i,n}$ converge

et dans ce cas
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{i,n} \right) e_i$$

Vocabulaire : Deux séries à valeurs dans E sont dites de même nature si elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes. Les séries $\sum u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} u_n$ avec n_0 entier sont clairement de même nature.

Exemple : Soit θ réel. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} R(\theta)^n$ converge avec $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et on trouve

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} R(\theta)^n = \frac{2}{5 - 4 \cos(\theta)} \begin{pmatrix} 2 - \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 2 - \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Définition 3. Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans E convergente de somme S . On appelle reste de la série $\sum u_n$ d'ordre n la quantité définie par

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Proposition 1. Si $\sum u_n$ converge, alors la suite $(R_n)_n$ est convergente de limite nulle.

Démonstration. Immédiate. □

Théorème 1 (Condition Nécessaire de convergence). Si la série $\sum u_n$ à valeurs dans E converge, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Démonstration. On a $u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} S - S = 0$. □

Vocabulaire : La contraposée donne : si $(u_n)_n$ ne tend pas zéro, alors $\sum u_n$ diverge. Une série $\sum u_n$ dont le terme général u_n ne tend pas vers zéro sera dite *grossièrement divergente*.

Exemple : Pour θ réel, la série $\sum R(\theta)^n = \sum R(n\theta)$ diverge grossièrement puisque

$$\|R(n\theta)\|_2 = \sqrt{2} \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Théorème 2. L'ensemble des séries à valeurs dans E convergentes muni de l'addition et du produit extérieur par un scalaire est un \mathbb{K} -ev comme sev de $E^{\mathbb{N}}$ et on a la linéarité de la somme :

1. Soit $\sum u_n$ convergente et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\sum \lambda \cdot u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda \cdot u_n = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
2. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergentes, alors $\sum (u_n + v_n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Démonstration. Immédiat d'après les résultats sur les suites à valeurs dans E . □

Définition 4. Une série $\sum v_n$ à valeurs dans E est dite *télescopique* s'il existe une suite $(u_n)_n$ à valeurs dans E telle que $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout n entier.

Proposition 2. Soit $\sum v_n$ une série télescopique à valeurs dans E avec $v_n = u_{n+1} - u_n$. La série $\sum v_n$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_n$ converge et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - u_0$$

Démonstration. Pour n entier non nul, on a $\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} [u_{k+1} - u_k] = u_n - u_0$ et le résultat suit. □

2 Convergence absolue

 On rappelle que l'espace E est de dimension finie.

Définition 5. Une série $\sum u_n$ à valeurs dans E est dite absolument convergente (ou converge absolument) si la série numérique $\sum \|u_n\|$ converge.

Théorème 3. Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans E absolument convergente. Alors la série $\sum u_n$ converge et on a l'inégalité triangulaire généralisée

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$$

Démonstration. Les normes étant équivalentes, on munit E de $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}}$. On a

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad |u_{i,n}| \leq \|u_n\|_{\infty, \mathcal{B}}$$

Par comparaison, on obtient la convergence absolue et donc la convergence des séries numériques $\sum u_{i,n}$ et par suite la convergence de la série $\sum u_n$. D'après l'inégalité triangulaire classique, on a $\left\| \sum_{k=0}^n u_k \right\| \leq \sum_{k=0}^n \|u_k\|$ pour n entier et par continuité de la norme, le résultat suit faisant tendre $n \rightarrow +\infty$. □

Remarques : (1) On a utilisé de manière essentielle le fait que l'espace E est de dimension finie dans la preuve. La convergence absolue implique la convergence dans un cadre plus général, celui des *espaces de Banach* mais ceci dépasse le cadre de ce cours.

(2) L'inégalité généralisée est à redémontrer en cas de besoin.

Exemple : Soit θ réel. La série $\sum \frac{1}{2^n} R(\theta)^n$ converge absolument puisque

$$\sum \left\| \frac{1}{2^n} R(\theta)^n \right\|_2 = \sum \frac{\sqrt{2}}{2^n}$$

et on a
$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} R(\theta)^n \right\|_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5 - 4 \cos \theta}} \leq 2\sqrt{2}$$

Théorème 4. L'ensemble des séries à valeurs dans E absolument convergentes est un \mathbb{K} -ev.

Démonstration. Conséquence de l'inégalité triangulaire. □

3 Exemples importants

Les résultats qui suivent existent à l'identique en version vectorielle et matricielle.

On rappelle que l'espace E étant de dimension finie, on a $\mathcal{L}_c(E) = \mathcal{L}(E)$ et qu'on définit pour $u \in \mathcal{L}(E)$ sa *norme subordonnée* ou *norme d'opérateur* par

$$\|u\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

qui vérifie $\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leq \|u\|_{\text{op}} \|x\|$

et $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2 \quad \|u \circ v\|_{\text{op}} \leq \|u\|_{\text{op}} \|v\|_{\text{op}}$

Théorème 5. La norme subordonnée est une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire c'est une norme sur $\mathcal{L}(E)$ telle que

$$\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2 \quad \|u \circ v\|_{\text{op}} \leq \|u\|_{\text{op}} \|v\|_{\text{op}}$$

On a de plus $\|\text{id}\|_{\text{op}} = 1$.

Démonstration. La séparation et l'inégalité triangulaire découlent d'une des propriétés précédentes. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, on montre $\|\lambda u\|_{\text{op}} \leq |\lambda| \|u\|_{\text{op}}$ puis $\|u\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda u\|_{\text{op}}$ pour $\lambda \neq 0$. L'inégalité sous-multiplicative a été rappelée précédemment et on a clairement $\|\text{id}\|_{\text{op}} = 1$. \square

Proposition 3 (À savoir refaire). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u\|_{\text{op}} < 1$. La série $\sum u^n$ converge absolument et l'endomorphisme $\text{id} - u$ est inversible d'inverse

$$(\text{id} - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$$

Démonstration. Par récurrence immédiate, on a $\|u^n\|_{\text{op}} \leq \|u\|_{\text{op}}^n$ et $\sum \|u\|_{\text{op}}^n$ converge d'où la convergence absolue puis, par télescopage et continuité de la composition (linéaire en dimension finie), il vient

$$(\text{id} - u) \circ \sum_{k=0}^n u^k = \sum_{k=0}^n [u^k - u^{k+1}] = \text{id} - u^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{id} = (\text{id} - u) \circ \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$$

\square

Proposition 4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. La série $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge absolument.

Démonstration. On a $\frac{\|u^n\|_{\text{op}}}{n!} \leq \frac{\|u\|_{\text{op}}^n}{n!}$ pour n entier. La convergence suit d'après le critère de d'Alembert d'où la convergence absolue de la série. \square

Proposition 5 (À savoir refaire). Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\exists k \in [0; 1[\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq k \|x_n - x_{n-1}\|$$

Alors, la suite $(x_n)_n$ converge.

Démonstration. Par récurrence immédiate, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$$

Par comparaison, la série $\sum [x_{n+1} - x_n]$ converge absolument donc converge et par théorème sur les séries télescopiques, la convergence de $(x_n)_n$ s'en déduit. \square

Exemple important : Soit $f : E \rightarrow E$ application contractante, i.e. il existe $k \in [0; 1[$ tel que la fonction f est k -lipschitzienne. La fonction f admet un unique point fixe. On choisit $x_0 \in E$ puis on pose $x_{n+1} = f(x_n)$ pour n entier. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq k \|x_n - x_{n-1}\|$$

On en déduit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \in E$ et $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\alpha)$ par continuité de f . Par unicité de la limite, on conclut

$$\alpha = f(\alpha)$$

L'unicité découle immédiatement de la contractance de f . On dispose également d'une vitesse de convergence en observant pour n entier non nul

$$\|x_n - \alpha\| = \|f(x_{n-1}) - f(\alpha)\| \leq k\|x_{n-1} - \alpha\|$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_n - \alpha\| \leq k^n \|x_0 - \alpha\|$

Application : Soit $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ muni d'une norme subordonnée et $(X_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ définie par $X_0 \in E$ et $X_{n+1} = AX_n + B$ avec $(A, B) \in E^2$ et $\|A\|_{\text{op}} < 1$. Alors la suite $(X_n)_n$ converge. On peut aussi retrouver ce résultat en clonant la démarche d'une suite arithmético-géométrique numérique.

II Dérivation

1 Définitions

Pour $a \in I$, l'ensemble $-a + I$ est un intervalle contenant 0 et non réduit à $\{0\}$.

Définition 6. Soit $f : I \rightarrow E$. La fonction f est dite dérivable en $a \in I$ si le taux d'accroissement $(-a + I) \setminus \{0\} \rightarrow E, h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite pour $h \rightarrow 0$. On note $f'(a)$ cette limite appelée vecteur dérivé ou simplement dérivée de f en a . La fonction f est dérivable à droite en a si le taux d'accroissement admet une limite pour $h \rightarrow 0^+$ notée $f'_d(a)$ et appelée vecteur dérivé ou simplement dérivé de f en a à droite (respectivement dérivable à gauche en a si le taux d'accroissement admet une limite pour $h \rightarrow 0^-$ notée $f'_g(a)$).

Proposition 6. Soit $f : I \rightarrow E$ et $a \in I$. On a

$$f \text{ dérivable en } a \iff f \text{ dérivable à droite et à gauche en } a \text{ et } f'_d(a) = f'_g(a)$$

Démonstration. Immédiate. □

Proposition 7. Soit $f : I \rightarrow E$. On a

$$f \text{ continue} \iff \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad f_i \text{ continue}$$

puis avec $a \in I \quad f \text{ dérivable en } a \iff \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad f_i \text{ dérivable en } a$

et dans ce cas
$$f'(a) = \sum_{i=1}^p f'_i(a) e_i$$

Démonstration. Immédiate par propriétés sur les limites. □

Lemme 1. Soit $(\varepsilon_j)_{1 \leq j \leq q} \in E^q$ et $(g_j)_{1 \leq j \leq q}$ des fonctions de I dans \mathbb{K} . On note $g = \sum_{j=1}^q g_j \varepsilon_j$. Si les g_j sont continues, alors g l'est aussi. Si les g_j sont dérivables en $a \in I$, alors g l'est aussi et $g'(a) = \sum_{j=1}^q g'_j(a) \varepsilon_j$.

Démonstration. La continuité des g_j entraîne celle de g par opération sur les limites. Puis, soit $h \in (-a + I) \setminus \{0\}$, si les g_j sont dérivables en a , il vient

$$\frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \sum_{j=1}^q \frac{g_j(a+h) - g_j(a)}{h} \varepsilon_j \xrightarrow{h \rightarrow 0} \sum_{j=1}^q g'_j(a) \varepsilon_j$$

d'où le résultat. □

Notation : On note $\mathcal{D}(I, E)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans E .

Exemples : 1. Pour $x : I \rightarrow \mathbb{K}^n, t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$, on a x dérivable si et seulement si les x_i sont dérivables et dans ce cas $x'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$ pour tout $t \in I$.

2. Pour $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), t \mapsto (a_{i,j}(t))$, on a A dérivable si et seulement si les $a_{i,j}$ sont dérivables et dans ce cas $A'(t) = (a'_{i,j}(t))$ pour $t \in I$.

Théorème 6. Soit $f : I \rightarrow E$ et $a \in I$. La fonction f est dérivable en a si et seulement si il existe $A \in E$ tel que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + (x - a)A + o(x - a)$$

et dans ce cas, on a $A = f'(a)$.

Démonstration. Immédiate. □

Corollaire 1. Soit $f : I \rightarrow E$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a , alors elle est continue en a .

Démonstration. Immédiate. □

2 Propriétés

Proposition 8. L'ensemble $\mathcal{D}(I, E)$ est un \mathbb{K} -ev et l'application $\mathcal{D}(I, E) \rightarrow \mathcal{F}(I, E), f \mapsto f'$ est linéaire.

Démonstration. Conséquence immédiate de la proposition 7. □

Proposition 9. Soit $f : I \rightarrow E$ dérivable en $a \in I$, F un \mathbb{K} -ev normé et $L \in \mathcal{L}(E, F)$. La fonction $L(f) : I \rightarrow F, x \mapsto L(f(x))$ est dérivable en a avec $L(f)'(a) = L(f')(a)$.

Démonstration. Soit $h \in (-a + I) \setminus \{0\}$. Par dérivabilité de f en a et continuité de L en tant qu'application linéaire sur un espace de dimension finie, il vient

$$\frac{L(f)(a+h) - L(f)(a)}{h} = L\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right) \underset{h \rightarrow 0}{\longrightarrow} L(f')(a)$$

□

Exemple : Soit $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dérivable, alors $t \mapsto \text{Tr}(A(t))$ est dérivable avec

$$\frac{d}{dt} \text{Tr}(A(t)) = \text{Tr}(A'(t))$$

Proposition 10. Soit E, F, G des \mathbb{K} -ev normés avec E et F de dimensions finies, $f : I \rightarrow E, g : I \rightarrow F$ dérivables en $a \in I$ et $B : E \times F \rightarrow G$ bilinéaire. La fonction $B(f, g) : I \rightarrow G, x \mapsto B(f(x), g(x))$ est dérivable en a avec

$$B(f, g)'(a) = B(f', g)(a) + B(f, g')(a)$$

Démonstration. Soit $h \in (-a + I) \setminus \{0\}$. Par bilinéarité de B , il vient

$$\tau(h) = \frac{B(f, g)(a+h) - B(f, g)(a)}{h} = B\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}, g(a+h)\right) + B\left(f(a), \frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right)$$

Par dérivabilité (et donc continuité) de f et g en a et continuité de B en tant qu'application bilinéaire sur des espaces de dimension finie, on obtient

$$\tau(h) \underset{h \rightarrow 0}{\longrightarrow} B(f', g)(a) + B(f, g')(a)$$

□

Proposition 11. Soit E euclidien et $f, g : I \rightarrow E$ dérivables en $a \in I$. La fonction $\langle f, g \rangle : I \rightarrow F, x \mapsto \langle f(x), g(x) \rangle$ est dérivable en a avec

$$\langle f, g \rangle'(a) = \langle f', g \rangle(a) + \langle f, g' \rangle(a)$$

Démonstration. Conséquence immédiate du résultat précédent. □

Proposition 12. Soit E_1, \dots, E_p , et F des \mathbb{K} -ev normés avec les E_i de dimensions finies, $f_i : I \rightarrow E_i$ dérivable en $a \in I$ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ et $M : \prod_{i=1}^p E_i \rightarrow F$ application p -linéaire. La fonction $M(f_1, \dots, f_p) : I \rightarrow F, x \mapsto M(f_1(x), \dots, f_p(x))$ est dérivable en a avec

$$M(f_1, \dots, f_p)'(a) = M(f'_1, f_2, \dots, f_p)(a) + M(f_1, f'_2, \dots, f_p)(a) + \dots + M(f_1, \dots, f'_p)(a)$$

Démonstration. On procède par récurrence sur p . L'initialisation pour $p = 1$ est la proposition 9. Considérons la configuration pour $p + 1$ avec p entier non nul et supposons le résultat vrai au rang p . On pose

$$\forall h \in (-a + I) \setminus \{0\} \quad \tau(h) = \frac{1}{h} [M(f_1, \dots, f_{p+1})(a + h) - M(f_1, \dots, f_{p+1})(a)]$$

On a pour $h \in (-a + I) \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \tau(h) &= M\left(f_1(a + h), \dots, f_p(a + h), \frac{f_{p+1}(a+h) - f_{p+1}(a)}{h}\right) \\ &\quad - \frac{1}{h} [M(f_1, \dots, f_p, f_{p+1}(a))(a + h) - M(f_1, \dots, f_{p+1}(a))(a)] \end{aligned}$$

Par continuité des f_i et de M en tant qu'application p -linéaire sur des espaces de dimension finie, il vient

$$\tau(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} M(f_1(a), \dots, f_p(a), f'_{p+1}(a)) + M(f_1, \dots, f_p, f_{p+1}(a))'(a)$$

l'hérédité suit ce qui clôt la récurrence. □

Application : Calcul de $\left(\prod_{i=1}^p f_i\right)'$ avec les $f_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivables.

Proposition 13. Soient $\varphi : J \rightarrow I$ dérivable en $\alpha \in J$ un intervalle de \mathbb{R} non vide, non réduit à un point et $f : I \rightarrow E$ dérivable en $a = \varphi(\alpha)$. La fonction $f \circ \varphi$ est dérivable en α avec

$$(f \circ \varphi)'(\alpha) = (\varphi' \cdot f' \circ \varphi)(\alpha)$$

Démonstration. On a $f \circ \varphi = \sum_{i=1}^p (f_i \circ \varphi) e_i$ et le résultat suit d'après la proposition 7. □

⚠ Avertissement : Le théorème de Rolle et son corollaire le théorème des accroissements finis sont faux dans un \mathbb{R} -ev E de dimension $p \geq 2$. Par exemple, on considère $f : t \mapsto \cos(t)\varepsilon_1 + \sin(t)\varepsilon_2$ avec $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une famille libre d'un \mathbb{R} -ev E . On a $f(0) = f(2\pi)$ mais f' ne s'annule pas sur $]0; 2\pi[$.

III Dérivations successives

1 Définitions

Soit n entier. Pour $f : I \rightarrow E$ qui est n fois dérivable, on définit $f^{(n)}$ par $f^{(0)} = f$ et $f^{(k+1)} = f^{(k)'$ pour $k + 1 \leq n$.

Définition 7. Une fonction $f : I \rightarrow E$ est dite de classe \mathcal{C}^n si f est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est continue et est dite de classe \mathcal{C}^∞ si elle est de classe \mathcal{C}^n pour tout n entier. On note $\mathcal{C}^n(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^n de I dans E et on a $\mathcal{C}^\infty(I, E) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I, E)$.

Dans ce qui suit, on a $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, sauf mention contraire.

Proposition 14. Soit $f : I \rightarrow E$. On a

$$f \in \mathcal{C}^n(I, E) \iff \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad f_i \in \mathcal{C}^n(I, E)$$

Dans ce cas, pour k entier avec $k \leq n$ $f^{(k)} = \sum_{i=1}^p f_i^{(k)} e_i$

Démonstration. Par récurrence avec la proposition 7. □

Théorème 7. L'espace $\mathcal{C}^n(I, E)$ est un \mathbb{K} -ev et pour n entier, l'application $\mathcal{C}^n(I, E) \rightarrow \mathcal{C}^0(I, E), f \mapsto f^{(n)}$ est linéaire.

Démonstration. Conséquence de la proposition 14 avec la linéarité de la dérivation d'ordre n pour des fonctions numériques (appliquée aux fonctions coordonnées). □

2 Propriétés

Soit n entier.

Proposition 15. Soient $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$, F un \mathbb{K} -ev normé et $L \in \mathcal{L}(E, F)$. On a $L(f) \in \mathcal{C}^n(I, F)$ et $L(f)^{(n)} = L(f^{(n)})$.

Démonstration. Par récurrence avec la proposition 9 et la continuité de $L(f^{(n)})$ comme composée d'applications continues. □

Proposition 16. Soient E, F, G des \mathbb{K} -ev normés avec E et F de dimensions finies, $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$, $g \in \mathcal{C}^n(I, F)$ et $B : E \times F \rightarrow G$ bilinéaire. La fonction $B(f, g) : I \rightarrow G, x \mapsto B(f(x), g(x))$ est de classe \mathcal{C}^n et pour n entier

$$B(f, g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(f^{(k)}, g^{(n-k)})$$

Démonstration. Par récurrence avec la proposition 10 (preuve identique à celle de la formule de Leibniz) et continuité de $B(f, g)^{(n)}$ comme combinaison de composées de fonctions continues ($B \circ (f^{(k)}, g^{(n-k)})$) avec $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. □

Proposition 17. Soient $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$ et $g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$. La fonction $g \cdot f$ est de classe \mathcal{C}^n et pour n entier

$$(g \cdot f)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)} \cdot f^{(n-k)}$$

Démonstration. Application immédiate de ce qui précède. □

IV Intégration sur un segment

La plupart des résultats énoncés ci-après s'obtiennent par héritage de l'intégrale « classique » (dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}) sur un segment. Dans ce qui suit, on note a et b des réels vérifiant $a \leq b$, sauf mention contraire.

1 Définitions

Définition 8. Soit $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{E})$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a; b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ de $[a; b]$, i.e. $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, f est continue sur $]a_i; a_{i+1}[$ et f admet des limites en a_i^+ et a_{i+1}^- .

Notations : On note $\mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{E})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a; b]$.

Vocabulaire : Pour $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{E})$, une subdivision σ vérifiant la propriété décrite dans la définition 8 est dite *adaptée* à f . Il n'y a pas unicité d'une telle subdivision : si σ est adaptée à f et σ' une sous-suite de σ subdivision de $[a; b]$ (on dit que σ' est plus fine que σ), alors la subdivision σ' est adaptée à f .

Définition 9. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{E})$. On dit que f est continue par morceaux sur I si, pour tout $[a; b] \subset I$, on a $f|_{[a; b]} \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{E})$.

Notations : On note $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{E})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I .

Proposition 18. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{E})$. On a

$$f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{E}) \iff \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad f_i \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$$

Démonstration. Soit $[a; b] \subset I$. Le sens direct est immédiat puisqu'une subdivision adaptée à $f|_{[a; b]}$ est adaptée aux fonctions coordonnées. Réciproquement, on considère σ une subdivision de $[a; b]$ telle que σ_i subdivision de $[a; b]$ adaptée à f_i est sous-suite de σ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$. C'est une subdivision adaptée à toutes les restrictions des fonctions coordonnées sur $[a; b]$ et donc à $f|_{[a; b]}$. \square

Définition 10. Pour $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{E})$, on définit l'intégrale de f sur $[a; b]$ noté $\int_a^b f(t) dt$ par

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=1}^p \int_a^b f_i(t) dt e_i$$

Notations : On note aussi $\int_{[a; b]} f(t) dt$ ou $\int_a^b f$ pour l'intégrale de f sur $[a; b]$. Pour $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{E})$ et $(a, b) \in I^2$, on conserve la convention usuelle $\int_a^b f(t) dt = -\int_b^a f(t) dt$ si $b \leq a$.

Proposition 19. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{E})$. L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ ne dépend pas du choix d'une base de \mathbb{E} .

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ et $\widetilde{\mathcal{B}} = (\widetilde{e}_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ des bases de E . On note $P = \text{mat}_{\widetilde{\mathcal{B}} \mathcal{B}}$ matrice de passage de \mathcal{B} à $\widetilde{\mathcal{B}}$ avec $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $X(t) = \text{mat}_{\mathcal{B}} f(t)$ et $\widetilde{X}(t) = \text{mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}} f(t)$ pour $t \in [a; b]$. On a $X(t) = P\widetilde{X}(t)$ pour $t \in [a; b]$ par changement de base. Puis, il vient

$$\sum_{j=1}^p \int_a^b \widetilde{f}_j(t) dt \widetilde{e}_j = \sum_{j=1}^p \int_a^b \widetilde{f}_j(t) dt \sum_{i=1}^p p_{i,j} e_i = \sum_{i=1}^p \int_a^b \left(\sum_{j=1}^p p_{i,j} \widetilde{f}_j(t) dt \right) e_i = \sum_{i=1}^p \int_a^b f_i(t) dt e_i$$

ce qui prouve le résultat attendu. \square

2 Propriétés

Proposition 20 (Linéarité). *L'application $\mathcal{C}_{pm}([a; b], E) \rightarrow E, f \mapsto \int_a^b f(t) dt$ est une application linéaire.*

Démonstration. Héritage de la linéarité de l'intégrale classique sur un segment. \square

Proposition 21 (Chasles). *Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, E)$. On a*

$$\forall (a, b, c) \in I^3 \quad \int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Démonstration. Héritage de la relation de Chasles de l'intégrale classique sur un segment. \square

Théorème 8 (Sommes de Riemann). *Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], E)$. On a*

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt \quad \text{et} \quad \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt$$

Démonstration. Immédiate par convergence des sommes de Riemann des fonctions coordonnées. \square

Théorème 9 (Inégalité triangulaire). *Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], E)$. On a*

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

Démonstration. Soit n entier non nul. Par inégalité triangulaire classique, on a

$$\left\| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right\| \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right\|$$

Faisant tendre $n \rightarrow +\infty$, utilisant la continuité de la norme et la continuité par morceaux de la composée $\|\cdot\| \circ f$, le résultat suit. \square

Théorème 10 (Changement de variables). *Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, E)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$ avec J intervalle de \mathbb{R} non vide, non réduit à un point. On a*

$$\forall (\alpha, \beta) \in J^2 \quad \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ \varphi(u) \varphi'(u) du$$

Démonstration. Héritage du théorème de changement de variables classique. \square

Théorème 11 (Intégration par parties). Soit $u \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ et $v \in \mathcal{C}^1(I, E)$. On a

$$\forall (a, b) \in I^2 \quad \int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

Démonstration. Héritage de l'intégration par parties classique. \square

Proposition 22. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, E)$ et $L \in \mathcal{L}(E, F)$ avec F un \mathbb{K} -ev normé. On a $L(f) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \text{Im } L)$ et

$$\forall (a, b) \in I^2 \quad L\left(\int_a^b f(t) dt\right) = \int_a^b L(f)(t) dt$$

Démonstration. Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a \leq b$. L'application L est continue comme application linéaire sur E espace de dimension finie. Par suite, la composée $L(f) = L \circ f$ est continue par morceaux sur I . Par continuité de L , il vient

$$L\left(\int_a^b f(t) dt\right) = L\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} L\left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)\right)$$

Puis, par linéarité de L et en utilisant de nouveau le théorème de convergence des sommes de Riemann, on obtient pour n entier non nul

$$L\left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} L(f)\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b L(f)(t) dt$$

Le cas $a \geq b$ est identique. \square

3 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Théorème 12. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, E)$ et $a \in I$. La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 et c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Démonstration. Héritage du théorème fondamental d'analyse classique. \square

Théorème 13. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, E)$ et F une primitive de f . On a

$$\forall (a, b) \in I^2 \quad \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Démonstration. Conséquence immédiate de ce qui précède puisque toute primitive est de la forme $x \mapsto C^{te} + \int_a^x f(t) dt$. \square

Théorème 14 (Inégalité des accroissements finis). Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$ avec $\|f'(t)\| \leq K$ pour tout $t \in I$. Alors

$$\forall (a, b) \in I^2 \quad \|f(b) - f(a)\| \leq K |b - a|$$

Démonstration. Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a \leq b$. D'après ce qui précède, on a $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$ d'où, par inégalité triangulaire

$$\|f(b) - f(a)\| = \left\| \int_a^b f'(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt \leq K(b - a)$$

Le cas $a \geq b$ est identique. \square

V Formules de Taylor

Dans ce qui suit, on a n entier.

1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 15. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$. On a

$$\forall (a, b) \in I^2 \quad f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) (b-t)^n dt$$

Démonstration. Héritage de Taylor avec reste intégral classique. □

Remarque : Formule globale, résultat pour tout $(a, b) \in I^2$.

2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 16. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$. Si $f^{(n+1)}$ est bornée sur I , alors

$$\forall (a, b) \in I^2 \quad \left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right\| \leq \sup_{x \in I} \|f^{(n+1)}(x)\| \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Démonstration. Par inégalité triangulaire sur Taylor avec reste intégral. □

Remarque : En pratique, souvent plus utile que Taylor reste-intégral. Sert à contrôler des quantités pour des études asymptotiques, pour des dominations (dans des théorèmes avec hypothèse de domination, etc.).

3 Formule de Taylor-Young

Théorème 17. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$. On a

$$\forall a \in I \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Démonstration. Héritage de Taylor-Young classique. □

Remarque : Formule locale avec un petit o dont le comportement est connu au voisinage de a .