ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°36

Exercice 1 (**)

Soit n entier non nul, $x \in [0;1]$ et $f(t) = (x\mathrm{e}^t + 1 - x)^n$ pour tout t réel.

1. Déterminer le développement limité de f en zéro à l'ordre deux.
2. En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

Corrigé : 1. Avec le développement de exp à l'ordre 2, il vient

$$f(t) = \left(x\left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) + 1 - x + \mathrm{o}(t^2)\right)^n = \left(1 + xt + x\frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\right)^n$$

On pose $u = xt + x\dfrac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)$. On a $u \to 0$ pour $t \to 0$. Avec le développement usuel

$$(1+u)^n = 1 + nu + \frac{n(n-1)}{2}u^2 + \mathrm{o}(u^2)$$

On obtient $$\boxed{f(t) = 1 + nxt + (nx + n(n-1)x^2)\,\frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)}$$

2. Un développement du binôme donne

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \mathrm{e}^{kt}$$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ comme composée de telles fonctions et par dérivation

$$\forall (p,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad f^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} k^p \mathrm{e}^{kt}$$

En particulier $\quad f'(0) = \sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad f''(0) = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

D'après le théorème de Taylor-Young, on a

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2}t^2 + \mathrm{o}(t^2)$$

Par unicité du développement limité, on obtient

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx \quad \text{et} \quad f''(0) = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2}$$

Exercice 2 (**)

Déterminer $$\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left[1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \quad \text{avec} \quad f \in \mathscr{C}([0;1], \mathbb{R}_+)$$

Corrigé : On pose $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{P}_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

On a $$\ln \mathrm{P}_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\forall u \geqslant 0 \qquad |\ln(1+u) - u| \leqslant \frac{u^2}{2}$$

On pose $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \Delta_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]$$

On a $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad |\Delta_n| \leqslant \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} f^2\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \frac{\|f^2\|_\infty}{2n} = \mathrm{o}(1)$$

Par suite $$\ln \mathrm{P}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \mathrm{o}(1)$$

D'après le théorème de convergence des sommes de Riemann et la continuité de l'exponentielle, on conclut

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)}$$

Exercice 3 (***)

Étant donné une courbe plane paramétrée par $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$, en un point $f(a)$ avec $a \in \mathrm{I}$ dit *régulier* c'est-à-dire tel que $f'(a) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, la *tangente* à la courbe en ce point est la droite passant par $f(a)$ de vecteur directeur $f'(a)$.

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b > 0$ et soient A et A$'$ deux points de $\mathcal{E}$ symétriques par rapport à O. La tangente à $\mathcal{E}$ en un point M coupe les tangentes à $\mathcal{E}$ en A et A$'$ respectivement en les points P et P$'$. On note $f(t) = (a\cos t, b\sin t)$ pour t réel un paramétrage de $\mathcal{E}$.

1. Notant t_0 le paramètre de A, justifier que $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \lambda f'(t_0)$ avec λ que l'on déterminera en fonction de t_0 et t le paramètre de M.
2. Montrer que $\mathrm{AP} \times \mathrm{A'P'}$ ne dépend pas du choix de M sur $\mathcal{E}$.

Corrigé : 1. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que f' ne s'annule pas, l'ellipse $\mathcal{E}$ est une courbe régulière.

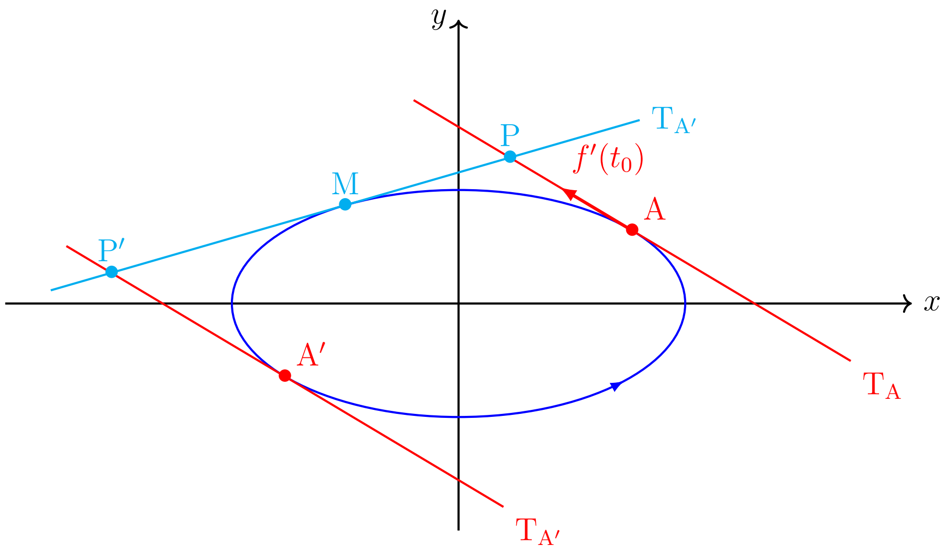

FIGURE 1 – Tangentes à l'ellipse

La tangente en A de paramètre t_0 est dirigée par $f'(t_0)$ et comme A et P sont sur cette tangente, on a $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \lambda f'(t_0)$ avec λ un réel. Par ailleurs, on a $\left(\overrightarrow{\mathrm{MP}}, f'(t)\right)$ liée d'où

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MP}}, f'(t)\right) = 0 &\iff \det\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}, f'(t)\right) = 0 \\ &\iff \det\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}, f'(t)\right) + \lambda \det(f'(t_0), f'(t)) = 0\end{aligned}$$

avec

$$\det(f'(t_0), f'(t)) = \begin{vmatrix} -a\sin t_0 & -a\sin t \\ b\cos t_0 & b\cos t \end{vmatrix} \qquad \det\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}, f'(t)\right) = \begin{vmatrix} a(\cos t_0 - \cos t) & -a\sin t_0 \\ a(\sin t_0 - \sin t) & b\cos t_0 \end{vmatrix}$$

On en déduit $$\boxed{\lambda = \frac{1-\cos(t-t_0)}{\sin(t-t_0)}}$$

2. D'après ce qui précède, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1-\cos(t-t_0)}{\sin(t-t_0)}(-a\sin t_0, b\cos t_0)$$

En remplaçant t_0 par $t_0+\pi$, on passe de A à A′ et de P à P′ d'où

$$\overrightarrow{\mathrm{A'P'}} = \frac{1+\cos(t-t_0)}{-\sin(t-t_0)}(a\sin t_0, -b\cos t_0)$$

Enfin, comme les tangentes en A et A′ sont parallèles puisque $(f'(t_0), f'(t_0+\pi))$ liée, on a

$$\mathrm{AP}\times\mathrm{A'P'} = \left|\left\langle \overrightarrow{\mathrm{AP}}, \overrightarrow{\mathrm{A'P'}}\right\rangle\right| = \frac{1-\cos^2(t-t_0)}{\sin^2(t-t_0)}\left(a^2\sin^2 t_0 + b^2\cos^2 t_0\right)$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{AP}\times\mathrm{A'P'} = a^2\sin^2 t_0 + b^2\cos^2 t_0}$$

Exercice 4 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^2([\,0\,;1\,], \mathrm{E})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. On suppose

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0 \quad \text{et} \quad \|f(1)\| = 1$$

Montrer $$\|f''\|_\infty \geqslant 4$$

Corrigé : Par inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\begin{cases} \|f\left(\dfrac{1}{2}\right) - f(0) - f'(0)\dfrac{1}{2}\| \leqslant \dfrac{1}{8}\|f''\|_\infty \\ \|f\left(\dfrac{1}{2}\right) - f(1) + f'(1)\dfrac{1}{2}\| \leqslant \dfrac{1}{8}\|f''\|_\infty \end{cases}$$

d'où $$\|f\left(\frac{1}{2}\right)\| + \|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1)\| \leqslant \frac{1}{4}\|f''\|_\infty$$

et par inégalité triangulaire

$$1 = \|f(1)\| \leqslant \|f\left(\frac{1}{2}\right)\| + \|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1)\| \leqslant \frac{1}{4}\|f''\|_\infty$$

Ainsi $$\boxed{\|f''\|_\infty \geqslant 4}$$

Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie, $f : \mathbb{R} \to \mathrm{E}$ dérivable en zéro telle que $f(0) = 0$.
Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$ admet une limite pour $n \to +\infty$ et la déterminer.

Corrigé : Soit n entier non nul. D'après le théorème de Taylor-Young, on a

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \mathrm{o}(x) = f'(0)x + \mathrm{o}(x)$$

d'où $$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f'(0)\frac{n+1}{2n} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{o}\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

La somme des o est difficile à contrôler puisque ces o dépendent *a priori* à la fois de k et de n. Pour éviter cette difficulté, on écrit

$$f(x) = f'(0)x + x\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Ainsi $$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f'(0)\frac{n+1}{2n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

On a $$\forall k \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \left|\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| \leqslant \|\varepsilon\|_{\infty,[\,0\,;\frac{1}{n}\,]}$$

Et comme $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a $\|\varepsilon\|_{\infty,[\,0\,;\frac{1}{n}\,]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Par suite, on obtient

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0)\frac{n+1}{2n}\right| \leqslant \|\varepsilon\|_{\infty,[\,0\,;\frac{1}{n}\,]}\frac{n+1}{2n} = \mathrm{o}(1) \times \mathrm{O}(1) = \mathrm{o}(1)$$

On conclut $$\boxed{\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f'(0)}{2}}$$

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev normé de dimension finie et $f \in \mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{E})$. On suppose qu'il existe $k \in \left]0\,;1\right[$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|f^2(x) - f^2(y)\| \leqslant k\|x-y\|$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Corrigé : Soit $a \in \mathrm{E}$. On définit la suite $(x_n)_n$ à valeurs dans E par

$$x_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

Alors, pour n entier non nul, on a

$$\|x_{2(n+1)} - x_{2n}\| = \|f^2(x_{2n}) - f^2(x_{2(n-1)})\| \leqslant k\|x_{2n} - x_{2(n-1)}\|$$

Par récurrence immédiate, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|x_{2(n+1)} - x_{2n}\| \leqslant k^n\|x_2 - x_0\|$$

On en déduit la convergence absolue et donc la convergence de la série téléscopique $\sum \left[x_{2(n+1)} - x_{2n}\right]$ ce qui prouve la convergence de la suite $(x_{2n})_n$. Ainsi, il existe $\alpha \in \mathrm{E}$ tel que $x_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$. De la même manière, on établit qu'il existe $\beta \in \mathrm{E}$ tel que $x_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta$. L'application f^2 est k-lipschitzienne donc continue et par conséquent

$$x_{2(n+1)} = f^2(x_{2n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\alpha) \quad \text{et} \quad x_{2(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$$

Par unicité de la limite, il s'ensuit $\alpha = f^2(\alpha)$ et de même $\beta = f^2(\beta)$. On a

$$\|\alpha - \beta\| = \|f^2(\alpha) - f^2(\beta)\| \leqslant k\|\alpha - \beta\|$$

d'où $\|\alpha - \beta\| = 0$ et on en déduit $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$. Puis, en observant $f^3(\alpha) = f(f^2(\alpha)) = f(\alpha)$, il vient

$$\|\alpha - f(\alpha)\| = \|f^2(\alpha) - f^3(\alpha)\| \leqslant k\|\alpha - f(\alpha)\|$$

d'où $\|\alpha - f(\alpha)\| = 0$ ce qui prouve que α est point fixe de la suite $(x_n)_n$. Enfin, soit $\gamma \in \mathrm{E}$ point fixe de f. Il est *a fortiori* point fixe de f^2 d'où

$$\|\alpha - \gamma\| = \|f^2(\alpha) - f^2(\gamma)\| \leqslant k\|\alpha - \gamma\|$$

ce qui prouve $\|\alpha - \gamma\| = 0$. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un unique point fixe.}}$$

Exercice 7 (****)

On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{P}_n = \prod_{k=0}^{n} (\mathrm{X} - k) \quad \text{et} \quad \forall x \in \left]0\,;1\right[\qquad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x-k}$

1. Montrer que pour tout n entier non nul, le polynôme P_n' admet une unique racine x_n sur $\left]0\,;1\right[$.
2. Pour n entier non nul, préciser la valeur de $f_n(x_n)$.
3. Établir $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{x_n} \leqslant \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$
4. En déduire un équivalent simple de x_n pour $n \to +\infty$.

5. Établir $\qquad \forall u \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right] \qquad |\ln(1-u)+u| \leqslant 2u^2$

6. En déduire un équivalent simple de $|\mathrm{P}_n(x_n)|$ pour $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. Pour $k \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$, d'après le théorème de Rolle appliqué à $x \mapsto \mathrm{P}_n(x)$ fonction de classe $\mathscr{C}^1$ (polynomiale), il existe $\alpha_k \in \,]\,k\,;k+1\,[$ tel que $\mathrm{P}'_n(\alpha_k) = 0$. Ainsi, on a $0 < \alpha_0 < 1 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{n-1} < n$ donc P'_n de degré n admet n racines distinctes ce qui prouve que P'_n est scindé à racines simples et notant $u_n = \alpha_0$, on conclut

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, \text{ le polynôme } \mathrm{P}'_n \text{ admet une unique racine } x_n \in \,]\,0\,;1\,[.}$$

2. Soit n entier non nul. Comme P_n est scindé à racines simples, on dispose de la décomposition en éléments simples

$$\frac{\mathrm{P}'_n}{\mathrm{P}_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathrm{X}-k}$$

Ainsi
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad f_n(x_n) = \frac{\mathrm{P}'_n(x_n)}{\mathrm{P}_n(x_n)} = 0}$$

3. Soit n entier non nul. On a

$$f_n(x_n) = 0 \iff \frac{1}{x_n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-x_n} = 0 \iff \frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-x_n}$$

Comme on a $u_n \in \,]\,0\,;1\,[$, on en déduit

$$\forall k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{k-x_n} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![\,2\,;\,n\,]\!] \qquad \frac{1}{k-x_n} \leqslant \frac{1}{k-1}$$

D'où
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{x_n} \leqslant \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}}$$

4. Par comparaison série/intégrale, on montre $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et par comparaison, il s'ensuit que $\dfrac{1}{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ d'où $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Par conséquent, en observant que $\dfrac{1}{1-x_n} = \mathrm{o}(\ln n)$, on obtient

$$\frac{1}{x_n} = \ln n + \mathrm{o}(\ln n)$$

D'où
$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}}$$

5. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\forall u \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right] \qquad |\ln(1-u)+u| \leqslant \operatorname*{Sup}_{t\in\left[0\,;\frac{1}{2}\right]} \frac{1}{(1-t)^2} \times \frac{|u-0|^2}{2}$$

Ainsi
$$\boxed{\forall u \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right] \qquad |\ln(1-u)+u| \leqslant 2u^2}$$

6. Comme $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on a $x_n \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ pour n assez grand puis

$$|\mathrm{P}_n(x_n)| = x_n \prod_{k=1}^{n} (k - x_n) = x_n n! \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x_n}{k}\right)$$

Puis $\qquad \forall k \in [\![1 \,;\, n]\!] \qquad -\dfrac{x_n}{k} - 2\dfrac{x_n^2}{k^2} \leqslant \ln\left(1 - \dfrac{x_n}{k^2}\right) \leqslant -\dfrac{x_n}{k} + 2\dfrac{x_n^2}{k^2}$

Après sommation, on obtient

$$-x_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2x_n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \ln \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x_n}{k}\right) \leqslant -x_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2x_n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \mathrm{O}(1)$, il vient par encadrement

$$\ln \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x_n}{k}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$$

On conclut $\qquad \boxed{|\mathrm{P}_n(x_n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n!}{\mathrm{e}\,\ln n}}$