ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°34

Exercice 1 (*)

En considérant la dérivée n-ième de l'application polynomiale $x \mapsto x^{2n}$, déterminer $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 2 (*)

Déterminer
$$\lim_{n \to +\infty} \int_n^{n+1} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$$

Exercice 3 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathrm{E}$ vérifiant
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\,|x - y|^{\alpha}$$
avec $k > 0$ et $\alpha > 1$.

Exercice 4 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ diagonalisable. On définit le *rayon spectral* de A noté $\rho(\mathrm{A})$ par
$$\rho(\mathrm{A}) = \operatorname*{Max}_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} |\lambda|$$
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\rho(\mathrm{A})$ pour avoir $\sum \mathrm{A}^k$ convergente.

Exercice 5 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer
$$\forall n \geqslant 1 \quad \exists 0 < x_1 < \ldots < x_n < 1 \mid \sum_{i=1}^{n} f'(x_i) = n$$

Exercice 6 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On définit le *rayon spectral* d'une matrice noté ρ par
$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{E} \qquad \rho(\mathrm{A}) = \operatorname*{Max}_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} |\lambda|$$
Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$. Montrer que pour toute norme d'opérateur sur E, on a
$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \rho(\mathrm{A}) \leqslant \|\mathrm{A}^p\|_{\mathrm{op}}^{1/p}$$

Exercice 7 (**)

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. Soit $f : t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R}^2)$ avec $\|f(t)\| = 1$ pour tout $t \in \mathrm{I}$ et $g : t \mapsto (-y(t), x(t))$. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ tel que
$$f' = \gamma g \quad \text{et} \quad g' = -\gamma f$$

Exercice 8 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie, $f : \mathbb{R} \to \mathrm{E}$ dérivable en zéro et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(2x) = 2f(x)$$

Montrer que f est linéaire.

Exercice 9 (**)

1. Soit n entier non nul. Montrer que

$$\forall p \in [\![0\,;\, n-1]\!] \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k k^p = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k k^n = (-1)^n n!$$

   Indication : on pourra considérer $\varphi(x) = (1 - \mathrm{e}^x)^n$ pour x réel.

2. Soit $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathrm{E})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Calculer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h^n} \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k f(hk)$.

Exercice 10 (**)

Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{C}([\,0\,;1\,]\,, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$. Montrer

$$\|\int_0^1 \mathrm{X}(t)\mathrm{X}(t)^\top \,\mathrm{d}t\|_2 \leqslant \mathrm{Tr}\left(\int_0^1 \mathrm{X}(t)\mathrm{X}(t)^\top \,\mathrm{d}t\right)$$

Exercice 11 (**)

Déterminer des majorations pour les expressions suivantes :

1. $\left|\sin x - x + \dfrac{x^3}{6}\right|$ pour x réel
2. $\left|\cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}\right|$ pour x réel
3. $\left|\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}\right|$ pour $x \geqslant 0$

Exercice 12 (**)

Calculer
$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} \,\mathrm{d}t$$