Feuille d'exercices n°35

Exercice 1 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et $f \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,],\mathrm{E})$ avec $f(a) = 0$. Montrer

$$\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \operatorname*{Sup}_{t\in[\,a\,;b\,]} \|f'(t)\|$$

Exercice 2 (***)

Étudier la nature de la suite $(\sin(\ln(n)))_{n\geqslant 1}$.

Exercice 3 (***)

Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi}{n+k}\right)$$

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie et $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathrm{E})$. On suppose que f et f'' sont bornées. On note $\mathrm{M}_0 = \|f\|_\infty$ et $\mathrm{M}_2 = \|f''\|_\infty$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\quad \forall h > 0 \qquad \|f'(x)\| \leqslant \dfrac{2\mathrm{M}_0}{h} + \dfrac{h\mathrm{M}_2}{2}$.
2. En déduire $\qquad \mathrm{M}_1 = \|f'\|_\infty \leqslant 2\sqrt{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$
3. Peut-on améliorer l'inégalité ?

Exercice 5 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}([\,0\,;1\,],\mathrm{E})$ avec E euclidien. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour avoir

$$\|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\| = \int_0^1 \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Exercice 6 (***)

Soit $\mathrm{I} =]\,0\,;+\infty\,[$. On pose $\qquad \forall x \in \mathrm{I} \setminus \{1\} \qquad f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{I} \setminus \{1\}$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1. On note g ce prolongement.
3. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Exercice 7 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^2([\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$. Montrer

$$n\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f(1)-f(0)}{2}$$

Exercice 8 (***)

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sin\left(2\pi n!\mathrm{e}\,\right)$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \sin\left(2\pi n!\mathrm{e}\,\right)$