ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°36

Exercice 1 (**)

Soit n entier non nul, $x \in [\,0\,;1\,]$ et $f(t) = (x\mathrm{e}^t + 1 - x)^n$ pour tout t réel.

1. Déterminer le développement limité de f en zéro à l'ordre deux.
2. En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

Indications : 2. Déterminer une nouvelle écriture de f plus adaptée au calcul de $f'(0)$ et $f''(0)$.

Exercice 2 (**)

Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left[1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \quad \text{avec} \quad f \in \mathscr{C}([\,0\,;1\,], \mathbb{R}_+)$$

Indications : Considérer $\ln \mathrm{P}_n$ avec $\mathrm{P}_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1 + \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right)$ pour n entier non nul puis utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange pour

Exercice 3 (***)

Étant donné une courbe plane paramétrée par $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$, en un point $f(a)$ avec $a \in \mathrm{I}$ dit *régulier* c'est-à-dire tel que $f'(a) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, la *tangente* à la courbe en ce point est la droite passant par $f(a)$ de vecteur directeur $f'(a)$.

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b > 0$ et soient A et A$'$ deux points de $\mathcal{E}$ symétriques par rapport à O. La tangente à $\mathcal{E}$ en un point M coupe les tangentes à $\mathcal{E}$ en A et A$'$ respectivement en les points P et P$'$. On note $f(t) = (a\cos t, b\sin t)$ pour t réel un paramétrage de $\mathcal{E}$.

1. Notant t_0 le paramètre de A, justifier que $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \lambda f'(t_0)$ avec λ que l'on déterminera en fonction de t_0 et t le paramètre de M.
2. Montrer que $\mathrm{AP} \times \mathrm{A'P'}$ ne dépend pas du choix de M sur $\mathcal{E}$.

Indications : 1. Calculer $\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MP}}, f'(t)\right)$.

2. Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ en fonction de t, t_0. Remarquer que remplacer t_0 par $t_0 + \pi$ permet de passer de A à A$'$ et de P à P$'$.

Exercice 4 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^2([\,0\,;1\,], \mathrm{E})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. On suppose
$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0 \quad \text{et} \quad \|f(1)\| = 1$$

Montrer
$$\|f''\|_\infty \geqslant 4$$

Indications : Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$.

Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie, $f : \mathbb{R} \to \mathrm{E}$ dérivable en zéro telle que $f(0) = 0$.
Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$ admet une limite pour $n \to +\infty$ et la déterminer.

Indications : Écrire le développement

$$f(x) = f'(0)x + x\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

puis observer $\|\varepsilon\|_{\infty,\left[0\,;\frac{1}{n}\right]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ dans $\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$ avec n entier non nul.

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev normé de dimension finie et $f \in \mathscr{F}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$. On suppose qu'il existe $k \in \left]0\,;1\right[$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|f^2(x) - f^2(y)\| \leqslant k\|x - y\|$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Indications : Pour $a \in \mathrm{E}$, poser $x_0 = a$ puis $x_{n+1} = f(x_n)$ pour n entier. Établir la convergence des suites $(x_{2n})_n$ et $(x_{2n+1})_n$ à l'aide de séries téléscopiques puis montrer l'égalité de leurs limites et prouver enfin que celle-ci est point fixe de f.

Exercice 7 (****)

On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{P}_n = \prod\limits_{k=0}^{n} (\mathrm{X} - k) \quad$ et $\quad \forall x \in \left]0\,;1\right[\qquad f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x - k}$

1. Montrer que pour tout n entier non nul, le polynôme P'_n admet une unique racine x_n sur $\left]0\,;1\right[$.
2. Pour n entier non nul, préciser la valeur de $f_n(x_n)$.
3. Établir $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{x_n} \leqslant \dfrac{1}{1 - x_n} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k}$
4. En déduire un équivalent simple de x_n pour $n \to +\infty$.
5. Établir $\qquad \forall u \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right] \qquad |\ln(1 - u) + u| \leqslant 2u^2$
6. En déduire un équivalent simple de $|\mathrm{P}_n(x_n)|$ pour $n \to +\infty$.

Indications : 2. Écrire la décomposition en éléments simples de $\dfrac{\mathrm{P}'_n}{\mathrm{P}_n}$.
3. Isoler le premier terme de la somme $f_n(x_n)$ et utiliser le fait que $x_n \in \left]0\,;1\right[$.
5. Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange.
6. Factoriser $x_n n!$ dans l'écriture de $|\mathrm{P}_n(x_n)|$ puis considérer le logarithme du produit restant et utiliser l'inégalité établie à la question précédente.