ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°25

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn. Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|x\| + \|y\| \leqslant \|x+y\| + \|x-y\|$$

Corrigé : Pour $(x,y) \in \mathrm{E}^2$, on écrit $x = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x-y}{2}$ puis $y = \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{2}$ et d'après l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|x\| + \|y\| \leqslant \|x+y\| + \|x-y\|}$$

Exercice 2 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{K})$, $(f_1,\ldots,f_n) \in \mathrm{E}^n$ et $\mathrm{N} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n \qquad \mathrm{N}(x) = \int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n x_i f_i\right|(t)\,\mathrm{d}t$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que l'application N soit une norme.

Corrigé : L'homogénéité et l'inégalité triangulaires ne présentent pas de difficultés. Puis, pour $x \in \mathbb{K}^n$, on a

$$\mathrm{N}(x) = 0 \iff \int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n x_i f_i\right|(t)\,\mathrm{d}t = 0 \iff \forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \left|\sum_{i=1}^n x_i f_i\right|(t) = 0$$

car la fonction $\left|\sum_{i=1}^n x_i f_i\right|$ est continue positive. Ainsi

$$\mathrm{N}(x) = 0 \iff \sum_{i=1}^n x_i f_i = 0$$

et on sait
$$\left(\sum_{i=1}^n x_i f_i = 0 \Longrightarrow x = 0\right) \iff (f_1,\ldots,f_n) \text{ libre}$$

On conclut

$$\boxed{\text{L'application N est une norme si et seulement } (f_1,\ldots,f_n) \text{ est une famille libre.}}$$

Exercice 3 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$. On pose

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}_1(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_2(f) = 2\,|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Montrer que N_1 et N_2 sont des normes puis étudier leur équivalence.

Corrigé : L'homogénéité et l'inégalité triangulaire s'obtiennent sans difficulté pour N_1 et N_2. Pour $f \in \mathrm{E}$, on a

$$\mathrm{N}_1(f)=0 \iff \begin{cases} |f(0)|=0 \\ \displaystyle\int_0^1 |f'(t)|\ \mathrm{d}t=0 \end{cases} \underbrace{\iff}_{|f'|\text{ continue, positive}} \begin{cases} f(0)=0 \\ f'=0 \end{cases} \iff f=0$$

d'où la séparation de N_1 et on procède de même pour N_2. Puis, pour $f\in\mathrm{E}$, on a

$$\mathrm{N}_1(f)\leqslant 2\,|f(0)|+\int_0^1 |f'(t)|\ \mathrm{d}t=\mathrm{N}_2(f)$$

et

$$\mathrm{N}_2(f)\leqslant 2\,|f(0)|+2\int_0^1 |f'(t)|\ \mathrm{d}t=2\mathrm{N}_1(f)$$

On conclut

$$\boxed{\text{Les normes } \mathrm{N}_1 \text{ et } \mathrm{N}_2 \text{ sont équivalentes.}}$$

Remarque : Les constantes sont optimales : avec $u:t\mapsto t$, on a $\mathrm{N}_1(u)=\mathrm{N}_1(u)$ et avec $v:t\mapsto 1$, on a $\mathrm{N}_2(v)=2\mathrm{N}_1(v)$.

Exercice 4 (*)

Soit $\mathrm{E}=\mathscr{C}^1([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$. On pose

$$\forall f\in\mathrm{E}\qquad \mathrm{N}(f)=|f(0)|+\|f'\|_\infty$$

Montrer que N est une norme puis étudier l'équivalence de N et $\|\cdot\|_\infty$.

Corrigé : L'application $\|\cdot\|_\infty$ étant une norme sur $\mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$, il en découle sans difficulté que N est une norme. Pour $f\in\mathrm{E}$ et $t\in[\,0\,;1\,]$, on a

$$f(t)=f(0)+\int_0^t f'(s)\,\mathrm{d}s$$

d'où par inégalité triangulaire

$$|f(t)|\leqslant|f(0)|+\int_0^t \underbrace{|f'(s)|}_{\leqslant\|f'\|_\infty}\ \mathrm{d}s\leqslant|f(0)|+t\|f'\|_\infty$$

et par suite

$$\|f\|_\infty\leqslant\mathrm{N}(f)$$

En revanche, la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas plus fine que la norme N. Pour n entier, posant $f_n:t\mapsto t^n$, on trouve

$$\mathrm{N}(f_n)=1+n\quad\text{et}\quad\|f_n\|_\infty=1$$

D'où

$$\frac{\mathrm{N}(f_n)}{\|f_n\|_\infty}\xrightarrow[n\to\infty]{}+\infty$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Les normes N et} \|\cdot\|_\infty \text{ ne sont pas équivalentes.}}$$

Exercice 5 (**)

Soit $\mathrm{E}=\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Pour $\mathrm{P}\in\mathrm{E}$ avec $\mathrm{P}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n\mathrm{X}^n$, on pose

$$\mathrm{N}_1(\mathrm{P})=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|\qquad \mathrm{N}_2(\mathrm{P})=\operatorname*{Sup}_{t\in[\,0\,;1\,]}|\mathrm{P}(t)|\qquad \mathrm{N}_3(\mathrm{P})=\operatorname*{Max}_{n\in\mathbb{N}}|a_n|$$

1. Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes.
2. Sont-elles équivalentes ?

Corrigé : 1. On vérifie sans difficulté que N_1 et N_3 sont des normes. Pour $P \in E$, on observe $N_2(P) = \|P\|_\infty$ avec la norme infinie appliquée à la fonction polynomiale $t \mapsto P(t)$. On en déduit l'homogénéité et l'inégalité triangulaire de N_2. Si $N_2(P) = 0$, on a $P(t) = 0$ pour tout $t \in [\,0\,;1\,]$ d'où une infinité de racines pour P et par conséquent $P = 0$. On conclut

$$\boxed{\text{Les applications } N_1,\ N_2 \text{ et } N_3 \text{ sont des normes.}}$$

2. Avec $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$ pour n entier, on trouve

$$N_1(P_n) = n + 1 \qquad N_2(P_n) = n + 1 \qquad N_3(P_n) = 1$$

Ainsi, les normes N_1 et N_3 ne sont pas équivalentes et de même pour N_2 et N_3. Avec $Q_n = (X-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k$ pour n entier, on trouve

$$N_1(Q_n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n \qquad N_2(Q_n) = \operatorname*{Sup}_{t \in [\,0\,;1\,]} (1-t)^n = 1$$

On conclut $\boxed{\text{Les normes } N_1,\ N_2 \text{ et } N_3 \text{ ne sont pas équivalentes entre elles.}}$

Remarque : On a clairement $N_3 \leqslant N_1$.

Exercice 6 (**)

On pose

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \forall (n, \theta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad S_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} R(\theta)^k$$

Étudier la convergence de la suite $(S_n(\theta))_{n \geqslant 1}$.

Corrigé : Soit θ réel avec $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. La matrice $R(\theta)$ est une matrice de rotation. Ainsi, on a $R(\theta)^k = R(k\theta)$ pour tout k entier. Pour n entier non nul, il vient par téléscopage

$$(I_2 - R(\theta)) S_n(\theta) = \frac{1}{n} (I_2 - R(\theta)^n) = \frac{1}{n} (I_2 - R(n\theta))$$

Comme $I_2 - R(\theta) \in GL_2(\mathbb{R})$ et que les coefficients de $R(n\theta)$ sont bornés, on trouve

$$S_n(\theta) = (I_2 - R(\theta))^{-1} \frac{1}{n} (I_2 - R(n\theta)) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Ainsi $\boxed{\forall \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \qquad S_n(\theta) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \forall \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \qquad S_n(\theta) = I_2}$

Variante : Soit θ réel. La matrice $R(\theta)$ est une matrice de rotation. Ainsi, on a $R(\theta)^k = R(k\theta)$ pour tout k entier. Par suite, pour n entier non nul

$$S_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$$

Pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} = \frac{1}{n} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} \qquad \Longrightarrow \qquad \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} \right| \leqslant \frac{2}{n\,|1 - e^{i\theta}|} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Comme $|\mathrm{Re}\ z| \leqslant |z|$ et $|\mathrm{Im}\ z| \leqslant |z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, il s'ensuit que $\mathrm{S}_n(\theta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Pour $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a $\mathrm{R}(\theta) = \mathrm{I}_2$ et on conclut

$$\boxed{\forall \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \qquad \mathrm{S}_n(\theta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \forall \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \qquad \mathrm{S}_n(\theta) = \mathrm{I}_2}$$

Exercice 7 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Déterminer si l'une des deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ vérifie l'inégalité dite de *norme d'algèbre*, à savoir
$$\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$$
2. On suppose E muni d'une norme $\|\cdot\|$. Montrer qu'il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que
$$\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\| \leqslant \mathrm{C}\|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$$

Corrigé : 1. Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$. On a

$$\|\mathrm{AB}\|_1 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right| \leqslant \sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n} |a_{i,k}|\,|b_{k,j}| \leqslant \sum_{1\leqslant i,j,k,\ell\leqslant n} |a_{i,j}|\,|b_{k,l}|$$

d'où
$$\boxed{\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\|_1 \leqslant \|\mathrm{A}\|_1\|\mathrm{B}\|_1}$$

Pour $n \geqslant 2$, considérant J la matrice constituée de 1, on a $\mathrm{J}^2 = n\mathrm{J}$ et par suite

$$\boxed{\|\mathrm{J}^2\|_\infty = n\|\mathrm{J}\|_\infty = n > 1 = \|\mathrm{J}\|_\infty^2}$$

2. L'espace E étant de dimension finie, les normes sont équivalentes. Il existe $\alpha, \beta > 0$ tel que $\alpha\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\| \leqslant \beta\|\cdot\|_1$. Ainsi

$$\boxed{\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\| \leqslant \beta\|\mathrm{AB}\|_1 \leqslant \beta\|\mathrm{A}\|_1\|\mathrm{B}\|_1 \leqslant \frac{\beta}{\alpha^2}\|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|}$$

Exercice 8 (**)

Soit A partie non vide de $\mathbb{R}$. On définit $\mathrm{N_A}$ sur $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ par

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{N_A}(\mathrm{P}) = \operatorname*{Sup}_{t\in\mathrm{A}} |\mathrm{P}(t)|$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{N_A}$ soit une norme.

Corrigé : Il faut d'abord que l'ensemble $\{|\mathrm{P}(t)|\,, t \in \mathrm{A}\}$ admette une borne supérieure finie. Si A est non bornée, comme $|\mathrm{P}(t)| \xrightarrow[t\to\infty]{} +\infty$ pour P non constant, alors la borne supérieure est infinie. Si A est bornée, la fonction $t \mapsto |\mathrm{P}(t)|$ continue l'est aussi sur A d'où l'existence d'une borne supérieure finie. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire découlent des propriétés de $\|\cdot\|_{\infty,\mathrm{A}}$. Si A est une partie finie, alors $\mathrm{P} = \prod_{a\in\mathrm{A}} (\mathrm{X} - a)$ est non nul avec $\mathrm{N_A}(\mathrm{P}) = 0$. Il faut donc que A soit infinie. Si A est infinie, pour P tel que $\mathrm{N_A}(\mathrm{P}) = 0$, il vient $\mathrm{P}(a) = 0$ pour tout $a \in \mathrm{A}$ d'où une infinité de racines pour P ce qui prouve $\mathrm{P} = 0$ et donc la séparation. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{N_A} \text{ est une norme si et seulement la partie non vide A est infinie et bornée.}}$$

Exercice 9 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. On pose

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \|\mathrm{P}\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t\in[\,0\,;1\,]} |\mathrm{P}(t)| \quad \text{et} \quad \|\mathrm{P}\|_1 = \int_0^1 |\mathrm{P}(t)|\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur E puis les comparer.
2. Dans E muni de $\|\cdot\|_\infty$, exhiber une suite bornée sans valeur d'adhérence.

Corrigé : 1. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont les normes usuelles appliquées aux fonctions polynomiales. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire en découlent. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, si $\|\mathrm{P}\|_\infty = 0$, on a $\mathrm{P}(t) = 0$ pour tout $t \in [\,0\,;1\,]$ d'où une infinité racines pour P et par conséquent $\mathrm{P} = 0$. Si $\|\mathrm{P}\|_1 = 0$, par séparation de l'intégrale avec la fonction $t \mapsto |\mathrm{P}(t)|$ continue positive, il vient $\mathrm{P}(t) = 0$ pour tout $t \in [\,0\,;1\,]$ et on conclut comme précédemment. Ainsi

$$\boxed{\text{Les applications } \|\cdot\|_\infty \text{ et } \|\cdot\|_1 \text{ sont des normes sur E.}}$$

2. On pose $\mathrm{P}_n = \mathrm{X}^n$ pour n entier. On a $\|\mathrm{P}_n\|_\infty = 1$ pour tout n entier. Supposons qu'il existe φ extractrice telle que $\mathrm{P}_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_\infty} \mathrm{P}$ avec $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$. On remarque

$$\forall \mathrm{Q} \in \mathrm{E} \qquad \|\mathrm{Q}\|_1 \leqslant \|\mathrm{Q}\|_\infty$$

On en déduit $\mathrm{P}_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_1} \mathrm{P}$. Or, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|\mathrm{P}_n\|_1 = \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

ce qui prouve $\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_1} 0$. L'unique valeur d'adhérence de la suite $(\mathrm{P}_n)_n$ pour la norme $\|\cdot\|_1$ est donc $\mathrm{P} = 0$ d'où, pour n entier

$$\|\mathrm{P}_{\varphi(n)} - \mathrm{P}\|_\infty = \|\mathrm{P}_{\varphi(n)}\|_\infty = 1$$

ce qui contredit $\mathrm{P}_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_\infty} \mathrm{P}$. On conclut

$$\boxed{\text{La suite } (\mathrm{X}^n)_n \text{ est bornée, sans valeur d'adhérence dans } (\mathrm{E}, \|\cdot\|_\infty).}$$