Feuille d'exercices n°26

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 2$. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur E invariante par conjugaison, c'est-à-dire telle que

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{P}) \in \mathrm{E} \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \qquad \|\mathrm{A}\| = \|\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\|$$

Corrigé : Soit $\mathrm{A} = \mathrm{E}_{1,n}$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à A. On note $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On a $u(e_n) = e_1 = 2e_1/2$. En considérant la base $\mathscr{B} = (e_1/2, e_2, \ldots, e_n)$, on trouve $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = 2\mathrm{A}$ ce qui prouve A semblable à 2A puis $\|\mathrm{A}\| = \|2\mathrm{A}\| = 2\|\mathrm{A}\|$ ce qui est absurde d'où

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de norme sur E invariante par conjugaison.}}$$

Variante : On peut procéder directement matriciellement. Considérant $\mathrm{A} = \mathrm{E}_{1,n}$ puis $\mathrm{P} = \mathrm{diag}(1/2, 1, \ldots, 1)$, on trouve $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = 2\mathrm{A}$ et on conclut comme précédemment.

Exercice 2 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$. On définit l'application N sur E par

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 \,\mathrm{d}t}$$

Montrer que N est une norme puis la comparer à $\|\cdot\|_\infty$.

Corrigé : L'application N est la norme euclidienne associée à $(f, g) \mapsto f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$. On vérifie sans difficulté qu'il s'agit d'un produit scalaire. Ainsi

$$\boxed{\text{L'application N est une norme sur E.}}$$

Soit n entier. Pour $f_n(t) = t^n$ avec $t \in [\,0\,;1\,]$, on a

$$\|f_n\|_\infty = 1 \qquad \mathrm{N}(f_n) = \sqrt{\int_0^1 n^2 t^{2n-2}\,\mathrm{d}t} = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}$$

Ainsi $\boxed{\text{Les normes N et } \|\cdot\|_\infty \text{ ne sont pas équivalentes.}}$

Soit $f \in \mathrm{E}$ et $x \in [\,0\,;1\,]$. On a $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ d'où

$$|f(x)| \leqslant |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Avec l'inégalité $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$ pour a, b réels, on trouve

$$|f(x)|^2 \leqslant 2\left(f(0)^2 + \left(\int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2\right)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\left(\int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$ et on conclut

$$\boxed{\forall f \in \mathrm{E} \qquad \|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\mathrm{N}(f)}$$

Remarques : (a) La constante est optimale. Pour $f : t \mapsto t+1$, on trouve $\|f\|_\infty = 2$ et $\mathrm{N}(f) = \sqrt{2}$.
(b) On peut avoir l'intuition que N est plus fine que $\|\cdot\|_\infty$: le contrôle de la position initiale et de l'« énergie » de la fonction f avec le terme $\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$ contraint les valeurs prises par la fonction et donc sa norme infinie.

Exercice 3 (**)

Soient $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2$ deux normes sur E un $\mathbb{K}$-ev.

1. On suppose que les boules unités fermées pour les deux normes sont égales. Montrer $\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_2$.
2. Montrer que le résultat vaut encore s'il s'agit des boules unités ouvertes.

Corrigé : 1. On note $\mathrm{B}_{f,\mathrm{N}_1}$ et $\mathrm{B}_{f,\mathrm{N}_2}$ les boules unités fermées respectivement pour les normes N_1 et N_2. Soit $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$. Comme on a en particulier $\mathrm{B}_{f,\mathrm{N}_1} \subset \mathrm{B}_{f,\mathrm{N}_2}$, il s'ensuit

$$\mathrm{N}_2\left(\frac{x}{\mathrm{N}_1(x)}\right) \leqslant 1$$

d'où
$$\mathrm{N}_2(x) \leqslant \mathrm{N}_1(x)$$

Par symétrie des rôles, l'autre inégalité s'en déduit et l'égalité a trivialement lieu pour $x = 0_\mathrm{E}$ d'où

$$\boxed{\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_2}$$

2. On note $\mathrm{B}_{\mathrm{N}_1}$ et $\mathrm{B}_{\mathrm{N}_2}$ les boules unités ouvertes respectivement pour les normes N_1 et N_2. Soit $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$ et n entier non nul. Comme on a en particulier $\mathrm{B}_{\mathrm{N}_1} \subset \mathrm{B}_{\mathrm{N}_2}$, il s'ensuit

$$\mathrm{N}_2\left(\frac{x}{\mathrm{N}_1(x) + 1/n}\right) < 1$$

d'où
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{N}_2(x) < \mathrm{N}_1(x) + \frac{1}{n}$$

Par passage à la limite, on en déduit l'inégalité large $\mathrm{N}_2(x) \leqslant \mathrm{N}_1(x)$ et on conclut donc comme précédemment que

$$\boxed{\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_2}$$

Exercice 4 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On définit la *norme de Frobenius* par $\|\mathrm{A}\|_\mathrm{F} = \sqrt{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^\top \mathrm{A})}$ pour $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$. Montrer que $\|\cdot\|_\mathrm{F}$ est une norme et qu'elle vérifie

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\|_\mathrm{F} \leqslant \|\mathrm{A}\|_\mathrm{F}\|\mathrm{B}\|_\mathrm{F}$$

Corrigé : Pour $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{E}$, on trouve

$$\|\mathrm{A}\|_\mathrm{F} = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2} = \|\mathrm{A}\|_2$$

La norme de Frobenius est donc la norme $\|\cdot\|_2$ et par conséquent

$$\boxed{\text{La norme de Frobenius est une norme.}}$$

Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$ et $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$. On a $\|\mathrm{C}\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} c_{i,j}^2$. Par définition du produit matriciel et inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, il vient

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2 \qquad c_{i,j}^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right)$$

Ainsi $$\|\mathrm{C}\|_{\mathrm{F}}^2 \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right)\right] = \left(\sum_{1\leqslant i,k\leqslant n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{1\leqslant k,j\leqslant n} b_{k,j}^2\right)$$

On conclut $$\boxed{\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\|_{\mathrm{F}} \leqslant \|\mathrm{A}\|_{\mathrm{F}}\|\mathrm{B}\|_{\mathrm{F}}}$$

Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant l'homogénéité et la séparation. Montrer que N est une norme si et seulement si l'ensemble

$$\mathrm{B} = \{x \in \mathrm{E} \quad | \quad \mathrm{N}(x) \leqslant 1\}$$

est une partie convexe de E.

Corrigé : Supposons N norme. Soit $(x,y) \in \mathrm{B}^2$ et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. Par inégalité triangulaire, on a

$$\mathrm{N}(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda\mathrm{N}(x) + (1-\lambda)\mathrm{N}(y) \leqslant 1$$

d'où la convexité de B. Réciproquement, supposons B convexe. Soit $(x,y) \in \mathrm{E}^2$. Supposons x et y non nuls. Par convexité de B, on a

$$\mathrm{N}\left(\frac{\mathrm{N}(x)}{\mathrm{N}(x)+\mathrm{N}(y)}\frac{x}{\mathrm{N}(x)} + \frac{\mathrm{N}(y)}{\mathrm{N}(x)+\mathrm{N}(y)}\frac{y}{\mathrm{N}(y)}\right) \leqslant 1$$

d'où $$\mathrm{N}(x+y) \leqslant \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{N} \text{ norme} \iff \mathrm{B} \text{ convexe}}$$

Exercice 6 (***)

Soit $\mathrm{E} = \{f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. On pose

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_2(f) = \|f + f'\|_\infty$$

Montrer que N_1 et N_2 sont des normes puis les comparer entre elles et ensuite avec $\|\cdot\|_\infty$.

Corrigé : On vérifie sans difficulté que N_1 et N_2 sont des normes sur E. Par inégalité triangulaire, il vient

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}_2(f) \leqslant \mathrm{N}_1(f)$$

Soit $f \in \mathrm{E}$ et $g = f' + f$. Déterminons une expression de f en fonction de g. Par résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec variation de la constante, on trouve

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad f(t) = \int_0^t g(s)\mathrm{e}^{s-t}\,\mathrm{d}s$$

D'où $$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad |f(t)| \leqslant \|g\|_\infty \underbrace{\int_0^t \mathrm{e}^{\,s-t}\,\mathrm{d}s}_{\leqslant 1} \leqslant \mathrm{N}_2(f)$$

puis $$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad |f'(t)| \leqslant |f'(t)+f(t)| + |f(t)| \leqslant 2\mathrm{N}_2(f)$$

et ainsi $$\mathrm{N}_1(f) \leqslant 3\mathrm{N}_2(f)$$

On conclut $$\boxed{\text{Les normes } \mathrm{N}_1 \text{ et } \mathrm{N}_2 \text{ sont équivalentes.}}$$

On a $$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \|f\|_\infty \leqslant \mathrm{N}_1(f) \leqslant 3\mathrm{N}_2(f)$$

En revanche, les autres inégalités sont en défaut puisque pour $f_n : t \mapsto t^n$ avec n entier, on a

$$\|f_n\|_\infty = 1 \qquad \mathrm{N}_1(f_n) = \mathrm{N}_2(f_n) = n+1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{N}_1(f_n)}{\|f\|_\infty} = \frac{\mathrm{N}_2(f_n)}{\|f\|_\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

$$\boxed{\text{Les normes } \mathrm{N}_1 \text{ et } \mathrm{N}_2 \text{ ne sont pas équivalentes à } \|\cdot\|_\infty.}$$

Exercice 7 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k$$

1. Établir $$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(u-\mathrm{id}\,) \oplus \mathrm{Im}\,(u-\mathrm{id}\,)$$
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge et préciser sa limite.

Corrigé : 1. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(u-\mathrm{id}\,) \cap \mathrm{Im}\,(u-\mathrm{id}\,)$ et n entier non nul. On a $u(x) = x$ et par suite $v_n(x) = x$. Par ailleurs, il existe $t \in \mathrm{E}$ tel que $x = (u-\mathrm{id}\,)(t)$. Par suite, on trouve

$$x = v_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ (u-\mathrm{id}\,)(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[u^{k+1}-u^k\right](t) = \frac{1}{n}\left[u^n(t)-t\right]$$

Comme $\|u(a)\| \leqslant \|a\|$ pour tout $a \in \mathrm{E}$, une récurrence immédiate donne $\|u^k(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout k entier. Ainsi, par inégalité triangulaire

$$\|x\| = \|v_n(x)\| \leqslant \frac{1}{n}\left[\|u^n(t)\| + \|t\|\right] \leqslant \frac{2\|t\|}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi $$\mathrm{Ker}\,(u-\mathrm{id}\,) \cap \mathrm{Im}\,(u-\mathrm{id}\,) = \{0_{\mathrm{E}}\}$$

Avec le théorème de rang, on conclut

$$\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(u-\mathrm{id}\,) \oplus \mathrm{Im}\,(u-\mathrm{id}\,)}$$

2. Soit $x \in \mathrm{E}$. D'après ce qui précède, on dispose d'un unique couple $(a,c) \in \mathrm{Ker}\,(u-\mathrm{id}\,) \times \mathrm{Im}\,(u-\mathrm{id}\,)$ tel que $x = a+b$ où $b = (u-\mathrm{id}\,)(c)$. On obtient pour n entier non nul par des calculs similaires à ceux de la questions précédente

$$v_n(a) = a \quad \text{et} \quad v_n(b) = \frac{1}{n}\left[u^n(c)-c\right]$$

On en déduit comme précédemment $\|v_n(b)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ puis

$$\|v_n(x)-a\| = \|a+v_n(b)-a\| = \|v_n(b)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

autrement dit $$\forall x \in \mathrm{E} \qquad v_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} p(x)$$

avec p projecteur sur $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id}\,)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}\,)$. On conclut

$$\boxed{v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p}$$

Exercice 8 (***)

Soient $p, q > 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et n un entier non nul. On note

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \qquad \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

1. Montrer $$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$
2. Montrer que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^n)^2$, on a $$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \|a\|_p \|b\|_q$$
3. Établir que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.
4. Pour $x \in \mathbb{K}^n$, déterminer $$\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p$$

Corrigé : 1. L'inégalité est trivialement vraie si a ou b est nul. Soient $a, b > 0$. Par concavité de ln, on a

$$\frac{1}{p}\ln(a) + \frac{1}{q}\ln(b) \leqslant \ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right)$$

D'où $$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}}$$

2. Si les a_k ou les b_k sont tous nuls, le résultat est trivial. On suppose les a_k et les b_k non tous nuls. On pose

$$\forall k \in [\![1 \,;\, n]\!] \qquad \alpha_k = \frac{a_k^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} \qquad \beta_k = \frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}$$

D'après le résultat de la première question, on a

$$\forall k \in [\![1 \,;\, n]\!] \qquad \alpha_k^{1/p} \beta_k^{1/q} \leqslant \frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{q}$$

Par sommation, il vient $$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{1/p} \beta_k^{1/q} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

D'où l'inégalité de Hölder $$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{q}}}$$

3. L'homogénéité et la séparation sont immédiates. Soit $(x, y) \in \mathbb{K}^n$. On a

$$\|x + y\|_p^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|\,|x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k|\,(|x_k + y_k|)^{p-1}$$

D'après l'inégalité de Hölder

$$\|x+y\|_p^p \leqslant (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} = (\|x\|_p + \|y\|_p)\, \|x+y\|_p^{p/q}$$

Si $x + y \neq 0$, l'inégalité triangulaire s'en déduit en divisant par $\|x+y\|_p^{p/q}$. Le résultat est trivialement vrai si $x + y = 0$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'application } \|\cdot\|_p \text{ est une norme sur } \mathbb{K}^n.}$$

4. Soit $x \in \mathbb{K}^n$. Il existe un indice $i_0 \in [\![1\,;\, n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \|x\|_\infty$. Par suite, on trouve

$$|x_{i_0}|^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \leqslant n\, |x_{i_0}|^p$$

d'où
$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$$

Comme $\sqrt[p]{n} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 1$, on conclut par encadrement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{K}^n \qquad \|x\|_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} \|x\|_\infty}$$