



CORRECTION DES S.L.C.I

Cours

v1.1

Institution Sainte Marie - 2 Rue de l'Abbaye - 92160 Antony

Table des matières

1 Les trois types d'actions d'un correcteur	4
1.1 Action proportionnelle	4
1.2 Action intégrale	4
1.3 Action dérivée	4
2 Correcteur proportionnel - P	5
2.1 Impact sur les performances	5
3 Correcteur intégral - I	7
3.1 Impact sur les performances	8
4 Correcteur proportionnel intégral (P.I.)	11
4.1 Impact sur les performances	13
5 Synthèse d'un correcteur P.I. - Méthode du pôle dominant	15
6 Synthèse d'un correcteur P.I. - Méthode expérimentale	16
7 Correcteur dérivateur	18
7.1 Dérivateur idéal	19
7.2 Dérivateur réel	19
7.3 Proportionnel dérivateur	19
8 Correcteur à avance de phase	21
8.1 Impact sur les performances	21
9 Synthèse d'un correcteur à avance de phase - Méthode du pôle dominant	22
10 Synthèse d'un correcteur à avance de phase - Méthode expérimentale	23

11 Critères de détermination des paramètres d'un correcteur	27
12 Correcteurs Hors-Programme	28
12.1 Correcteur à retard de phase	28
12.2 Correcteur à retard-avance de phase	29
12.3 Correcteur P.I.D.	30

Introduction

Nous avons vu dans les chapitres précédents que les systèmes asservis pouvaient présenter des défauts, une précision insuffisante, une stabilité trop relative (voire une instabilité), un temps de réaction trop lent, un dépassement trop important. Il est donc souvent nécessaire d'intégrer dans le système asservi un réseau correcteur dont l'objectif est d'améliorer un ou plusieurs de ces différents paramètres sans détériorer les autres. Les correcteurs doivent permettre de réaliser le meilleur compromis entre précision, stabilité et rapidité du système étudié.

Pour un système asservi, la commande du système est élaborée de façon autonome à partir de l'écart entre une consigne donnée et la grandeur obtenue en sortie. Pour améliorer ses performances, il est envisagé de modifier sa FTBO de façon à optimiser la commande en ajoutant un élément, le correcteur, dont on choisit la fonction de transfert. Le correcteur peut être placé de plusieurs façons :

- dans la chaîne directe ;
- dans la chaîne de retour ;
- dans une boucle ajoutée.

Les développements qui suivent se limitent à l'étude de différents correcteurs placés entre le comparateur et le système commandé. On dit dans ce cas qu'il s'agit d'un correcteur « série » (*c.f.* FIGURE 1).

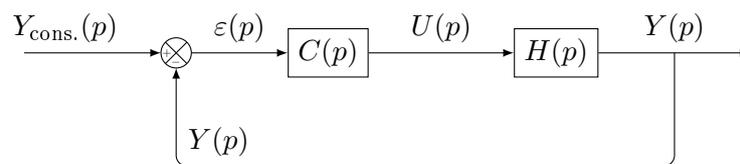


FIGURE 1 – Système à retour unitaire avec un correcteur « série ».

La fonction de transfert en boucle ouverte est définie alors par

$$H_{BO}(p) = C(p) \times H(p)$$

Le contrôle d'un système asservi doit permettre de satisfaire aux exigences de **stabilité**, de **dépassement**, de **rapidité** et de **précision**.



Remarque

L'étude de la fonction de transfert en boucle ouverte aux *basses fréquences* permet d'évaluer le système en termes de *précision*. Pour la *stabilité* et les *dépassements*, c'est plutôt le comportement aux *hautes fréquences* qui est déterminant.

On peut mettre en évidence trois types d'actions de correction : l'action proportionnelle, l'action dérivée et l'action intégrale.

1 Les trois types d'actions d'un correcteur

Les correcteurs couramment rencontrés, utilisent trois types d'action :

- action proportionnelle ;
- action intégrale ;
- action dérivée ;

1.1 Action proportionnelle

Lorsque la sortie du système converge trop lentement, une solution simple consiste à *laisser croire* au système (ex : moteur) que l'erreur vis-à-vis de la consigne est K_P fois plus grande que l'erreur réelle afin d'amplifier sa réaction, avec K_P un gain (généralement ≥ 1).



Définition *Action proportionnelle*

L'action proportionnelle est directement proportionnelle à l'écart $\varepsilon(t)$. Elle permet de modifier le gain de la fonction de transfert.

1.2 Action intégrale

Lorsque la sortie du système ne converge pas vers la valeur de consigne (dû à une imprécision, ou à des perturbation), une solution consiste à intégrer l'erreur en sortie du comparateur¹. En effet, on demande alors au cumul des écarts de tendre vers 0 en régime permanent, ce qui a tendance à jouer sur la précision.



Définition *Action intégrale*

L'action intégrale prend en compte le cumul des écarts (elle est fonction de $\int_0^t \varepsilon(u)du$). Elle permet d'ajouter un pôle à la fonction de transfert.

1.3 Action dérivée

Lorsque la sortie oscille trop avant de converger vers une valeur constante, une solution logique est d'anticiper et de ralentir à l'approche de la valeur de consigne, c'est-à-dire de diminuer la commande lorsque l'erreur diminue rapidement. Il s'agit donc d'élaborer la commande à partir de l'étude des variations de l'erreur.

1. Les systèmes non précis, sont ceux qui ont besoin d'énergie pour maintenir la grandeur de sortie au niveau de la valeur de consigne (c'est le cas par exemple pour un asservissement de vitesse : le moteur doit être alimenté pour maintenir la vitesse de consigne). Or, sans correcteur (ou avec un correcteur proportionnel) lorsque la sortie a atteint la valeur de la consigne, l'erreur est nulle $\mu = 0$ (et pour un retour unitaire, l'écart ε est nul également).

**Définition** *Action dérivée*

L'action dérivée prend en compte les variations de l'écart (elle est fonction de $\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$). Elle permet d'ajouter un zéro à la fonction de transfert.

2 Correcteur proportionnel - P

**Définition** *Correcteur proportionnel*

On appelle *correcteur proportionnel*, un correcteur de fonction de transfert de la forme :

$$C(p) = K_p$$

On se retrouve alors avec une donc $FTBO(p)$ qui s'écrit :

$$FTBO(p) = K_p \cdot H(p) = K_p \cdot \frac{K \cdot N(p)}{p^\alpha D(p)}$$

Nous allons regarder l'influence de ce gain sur les performances du système.

2.1 Impact sur les performances

Précision

- Si la fonction de transfert en boucle ouverte du système non corrigé $H(p)$ ne possède pas d'intégration (*i.e* $\alpha = 0$) alors d'après le chapitre précédent l'erreur indicielle ε_i d'un système ne possédant pas d'intégration est de la forme :

$$\varepsilon_i = \frac{E_O}{1 + K_{Bo}}$$

avec dans ce cas, $K_{Bo} = K_p \cdot K$.

- Si la fonction de transfert en boucle ouverte du système non corrigé $H(p)$ possède une intégration elle s'écrit une fois corrigée :

$$FTBO(p) = K_p \cdot H(p) = K_p \cdot \frac{K \cdot N(p)}{p \cdot D(p)}$$

Le système est déjà naturellement précis pour une entrée en échelon $\varepsilon_i = 0$. Le correcteur proportionnel n'a donc pas d'effet direct sur l'erreur indicielle, par contre on sait que l'erreur de traînage est de la forme :

$$\varepsilon_t = \frac{A}{K_{Bo}}$$

**Propriété**

Le correcteur proportionnel permet donc, en augmentant le gain de la $FTBO$, d'améliorer la **préci-**

tion du système (à condition de rester dans la limite de la stabilité du système).

Stabilité et rapidité Les figures ci-dessous montrent les réponses temporelles du système, ainsi que le tracé des lieu de Bode de la *FTBO* pour :

$$H() = \frac{10}{1 + \frac{2 \cdot 0.9}{10} p + \frac{1}{10^2} p^2}$$

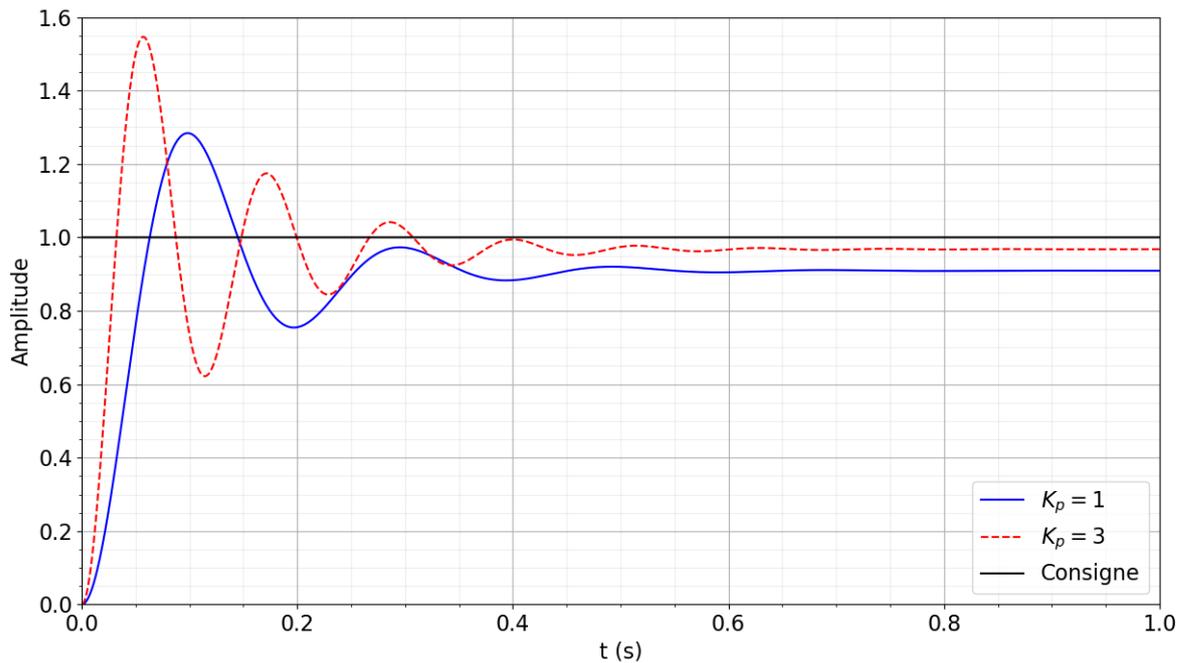


FIGURE 2 – Réponses temporelles de la *FTBO*(p) avec $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$ ($K = 10$, $\omega_0 = 10$ rad/s, $\xi = 0.9$)

On observe :

- Pour la réponse temporelle :
 - ◇ comme prévu, ε_i diminue
 - ◇ la sortie est de plus en plus oscillante
 - ◇ le dépassement d augmente
 - ◇ la pseudo-période T_p diminue (ω_p augmente)
 - ◇ le temps de montée diminue,

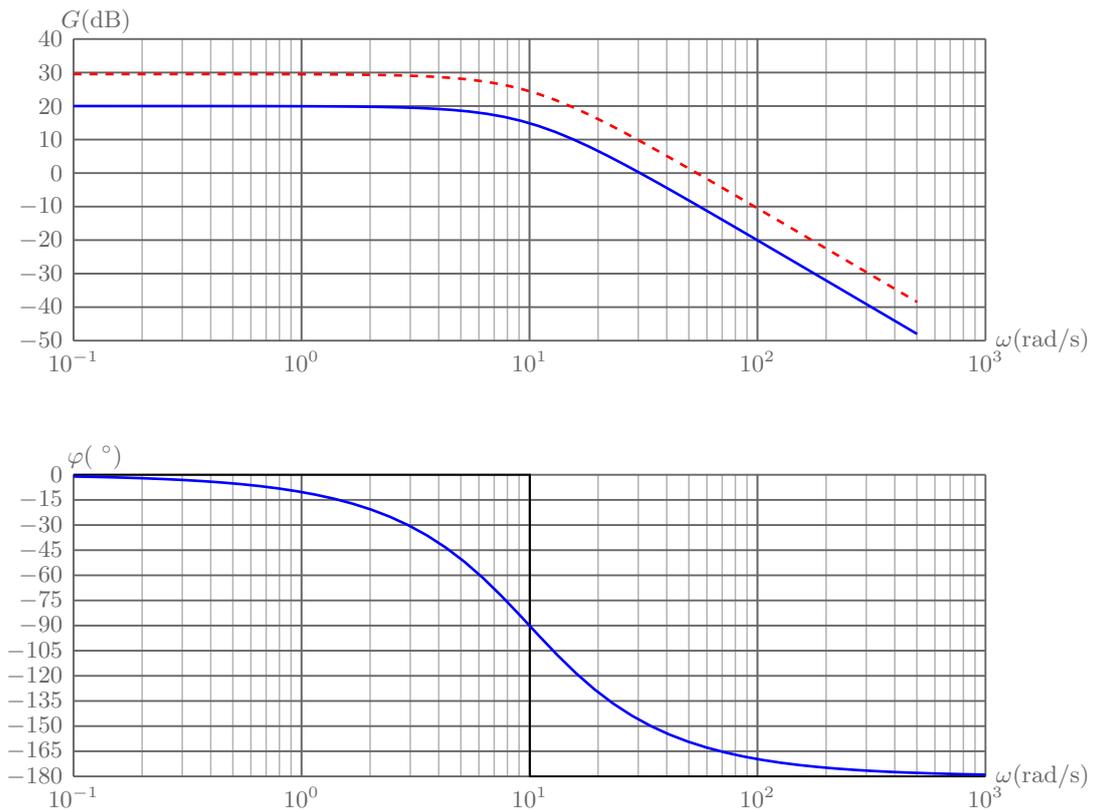


FIGURE 3 – Diagramme de Bode de la *FTBO* du système corrigé pour $K_p = 1$ et $K_p = 3$.

On observe :

- Pour la réponse fréquentielle :
 - ◊ La courbe de gain est translatée vers le haut de $20 \log(K_p)$
 - ◊ la bande passante de la *FTBO* augmente, ce qui diminue le temps de montée
 - ◊ les marges de gain et de phase diminuent



À retenir

- Pour un correcteur proportionnel : $C(p) = K_P$, la rapidité et la précision augmentent au détriment de la stabilité du système.

3 Correcteur intégral - I

Un correcteur intégral « pur » ne comporte qu'une action intégrale. Il augmente la classe de la *FTBO*.



Définition Correcteur intégral

On appelle *correcteur intégral* un correcteur de fonction de transfert :

$$C(p) = \frac{1}{T_i p}$$

ou

$$C(p) = \frac{K_i}{p}$$

Ce type de correcteur peut être réalisé avec une bonne approximation par un montage intégrateur à base d'amplificateurs opérationnels.

Notre fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit donc :

$$FTBO(p) = \frac{1}{T_i \cdot p} \cdot \frac{K \cdot N(p)}{p^\alpha \cdot D(p)}$$

3.1 Impact sur les performances

Le correcteur apporte une intégration dans la chaîne de commande. Il augmente ainsi la classe de la *FTBO* avec **tout ce que cela implique sur la précision**.

Traçons pour une fonction de transfert $H(p)$ différentes réponses temporelles en présence ou non d'un correcteur intégral.

$$H(p) = \frac{2}{1 + \frac{2}{5}p + \frac{1}{5^2}p^2}$$

La réponse temporelle :

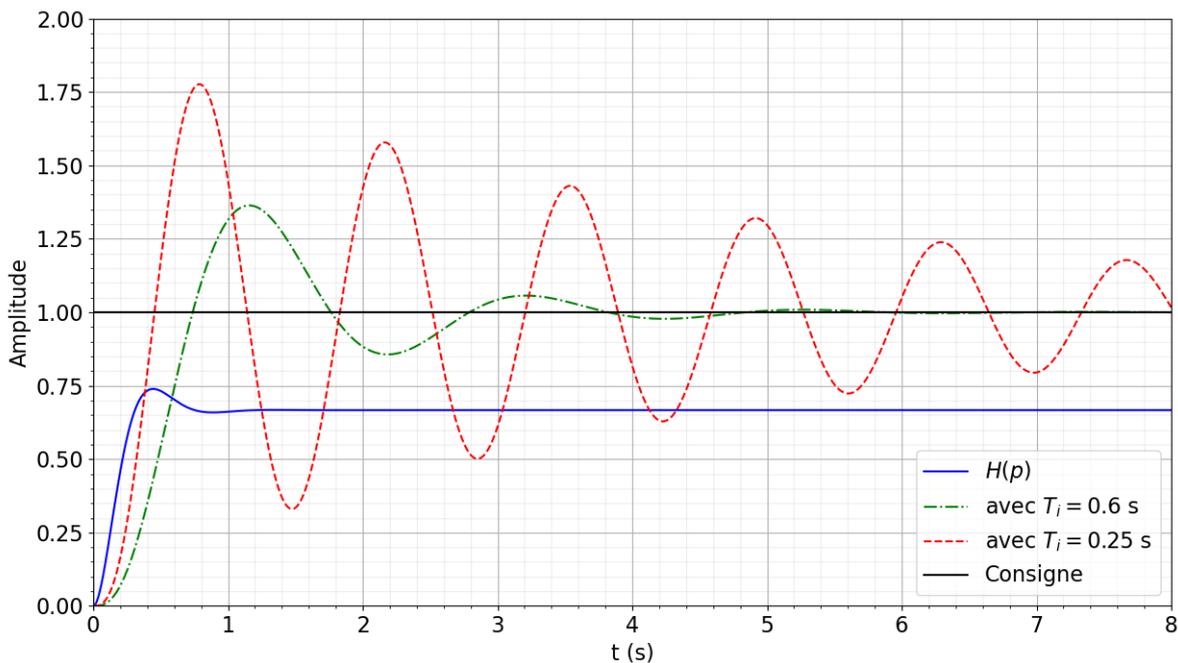


FIGURE 4 – Réponses indicielles de la fonction de transfert en boucle fermée avec et sans correction intégrale.

On observe :

- Pour la réponse indicielle :
 - ◇ l'augmentation de la précision
 - ◇ l'augmentation à la fois du dépassement mais aussi des oscillations
 - ◇ l'augmentation du temps de réponse à 5%.

La réponse fréquentielle :

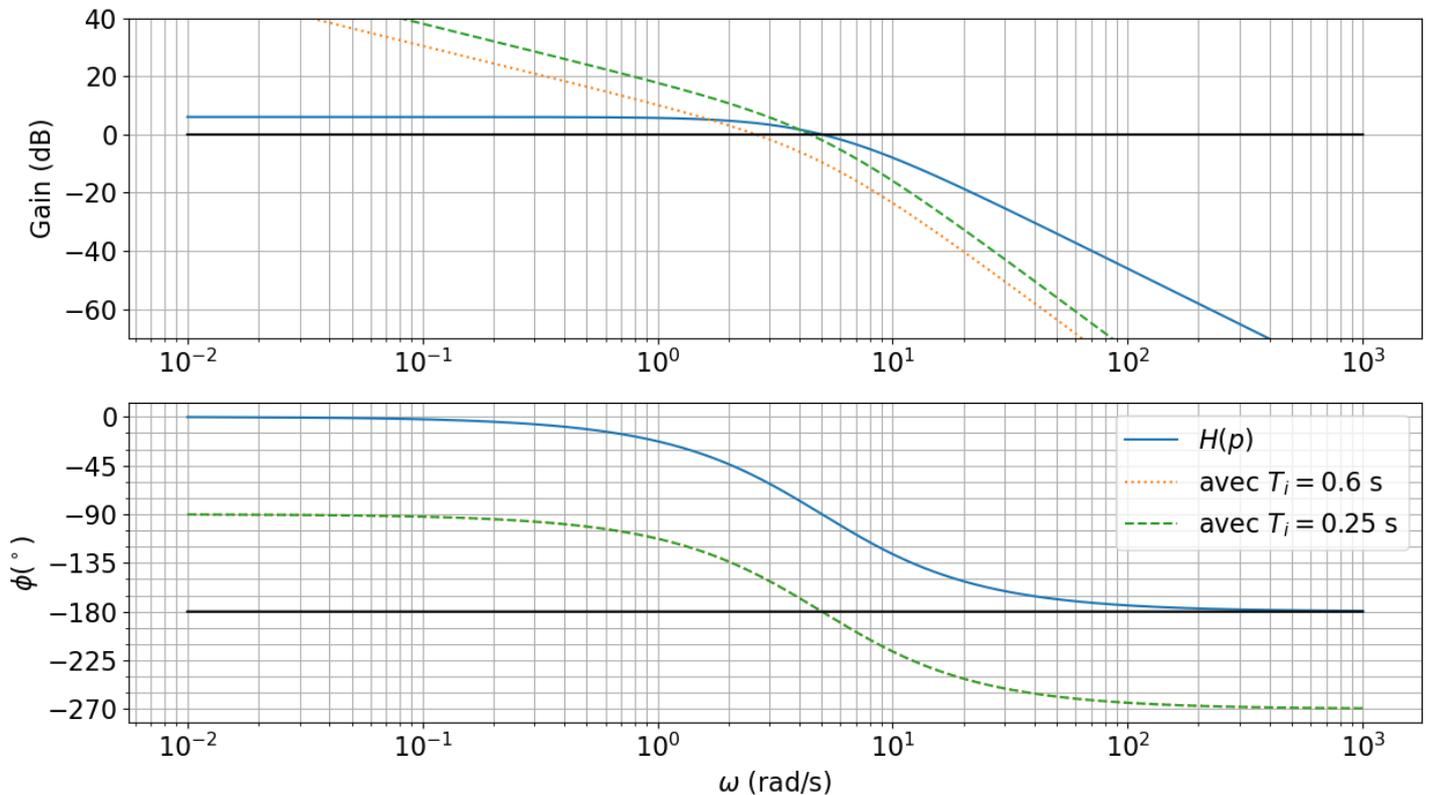


FIGURE 5 – Diagramme de Bode de la *FTBO* du système corrigé pour $T_i = 0.6\text{ s}$ et $T_i = 0.25\text{ s}$.

On observe :

- Pour la réponse fréquentielle :
 - ◇ La courbe de phase est translatée de -90° vers le bas
 - ◇ une diminution de la bande passante
 - ◇ une (très) forte diminution de la marge de phase



À retenir

- Cette intégration dans la *FTBO* permet d'annuler l'erreur statique pour une entrée en échelon, l'intérêt principal de ce type de correcteur est donc d'améliorer la **précision**.
- Il introduit malheureusement un déphasage de -90° et risque donc de rendre le système instable par diminution de la marge de phase.
- Il détériore la rapidité du système (diminution de la bande passante de la *FTBO* \Rightarrow diminution de la bande passante de la *FTBF* \Rightarrow augmentation du temps de montée \Rightarrow augmentation du temps de réponse)

Au vu de ses faibles performances ce correcteur est rarement utilisé seul.

**Remarque**

Concrètement ce que l'on voudrait, c'est un correcteur intégral, qui :

- Augmente la classe du système, et donc possède une intégration
- Possède une phase $\varphi_{CI}(\omega)$ telle que :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_{CI}(\omega) = 0$$

C'est à dire que le correcteur n'introduise aucun déphasage à l'infini.

- Remonte sa phase quand on le souhaite, par exemple avant la pulsation ω_{0dB} pour éviter d'abaisser la marge de phase.

4 Correcteur proportionnel intégral (P.I.)

Le correcteur intégrateur idéal est en général associé au correcteur proportionnel. La loi de commande de ce correcteur est alors de la forme :

$$u(t) = K_p \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(u) du \right)$$

d'où la fonction de transfert :

$$C_{pi}(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) = K_p \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$$

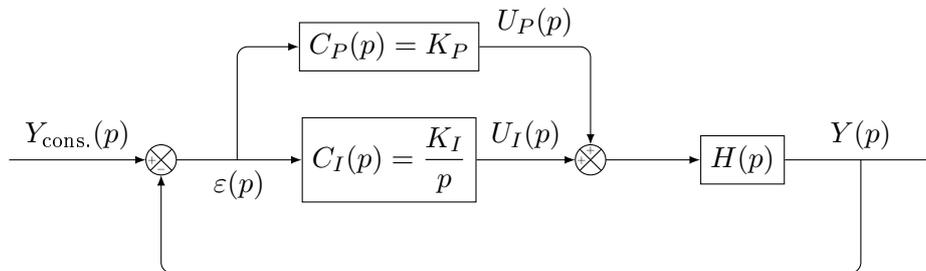


FIGURE 6 – Système asservi avec correcteur PI théorique.

Ce correcteur possède deux paramètres de réglage :

- K_p , gain qui n'agit que sur le gain, la courbe de gain est translatée en fonction de K_p

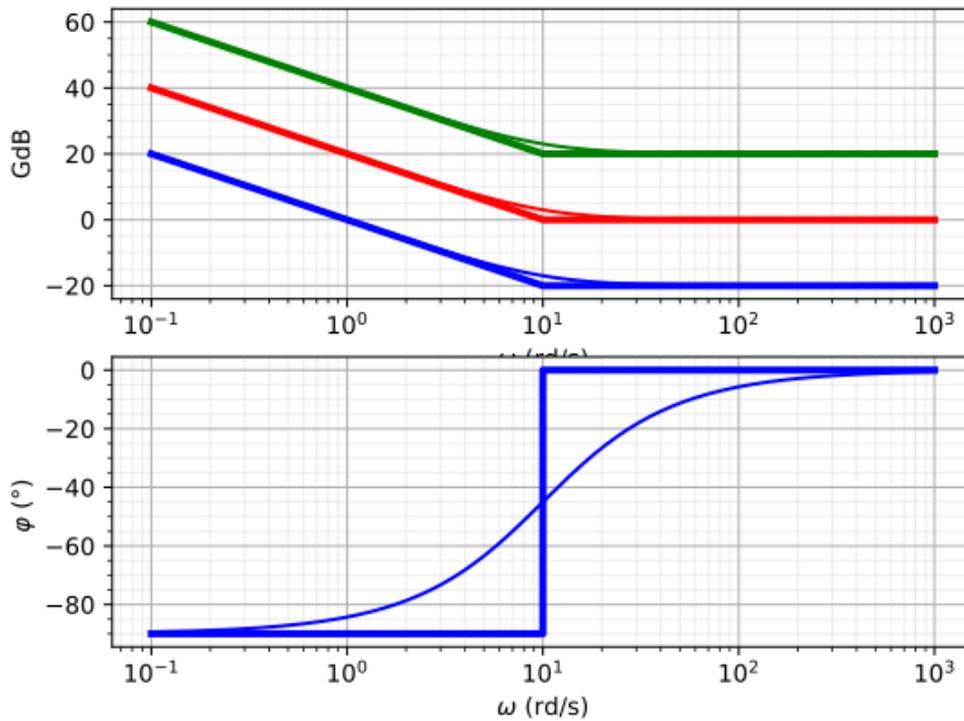


FIGURE 7 – Influence de K_p dans le plan de Bode pour un correcteur prop. intégral. Ici $K_p \in \{0.1, 1, 10\}$

- T_i , la constante d'intégration agit principalement sur la phase pour les pulsations inférieures $\frac{1}{T_i}$, les courbes sont translatées le long de l'axe des pulsations.

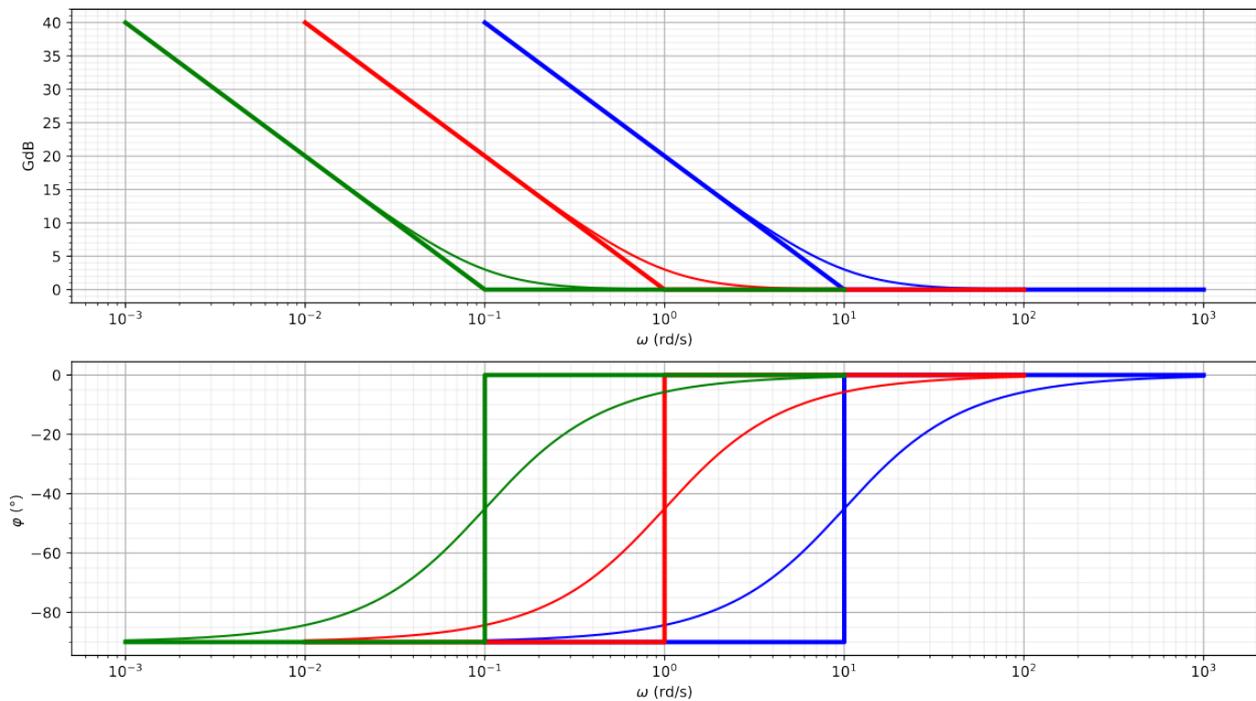


FIGURE 8 – Influence de T_i dans le plan de Bode pour un correcteur prop. intégral. Ici $T_i \in \{0.1, 1, 10\}$

4.1 Impact sur les performances

Le correcteur P.I. permet donc d'améliorer :

- **Le comportement statique** : c'est à dire le régime permanent, en effet, l'intégration dans la FTBO, augmente la classe du système et impose une erreur indicielle nulle.
- **Le comportement dynamique** : c'est à dire le régime transitoire, en effet le numérateur $(1 + T_i \cdot p)$ tend à annuler dans la zone critique l'effet négatif de l'intégration. Cela permet d'améliorer la marge de phase en pondérant, ou plutôt de ne pas la détériorer et ainsi améliorer la précision sans déstabiliser le système.

De fait, il faut un choix judicieux du gain K_p et de la constante d'intégration T_i pour améliorer le comportement du système sans trop dégrader la stabilité et la rapidité.

Exemple

Considérons l'asservissement suivant :

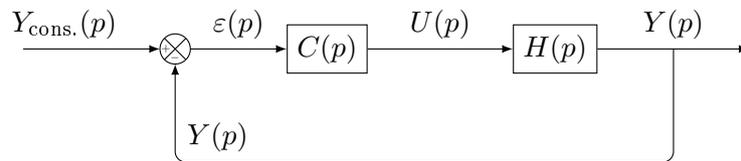


FIGURE 9 – Système à retour unitaire avec un correcteur « série ».

Avec :

$$H(p) = \frac{5}{(1 + 0.08p)^2 \cdot (1 + 0.01p)}$$

Et le correcteur $C(p)$:

$$C(p) = K_p \frac{1 + T_i p}{T_i p}$$

Nous pouvons alors tracer la réponse temporelle et le diagramme de Bode du système avec et sans correction, avec ici $K_p = 0.2$ et $T_i = 0.08$.

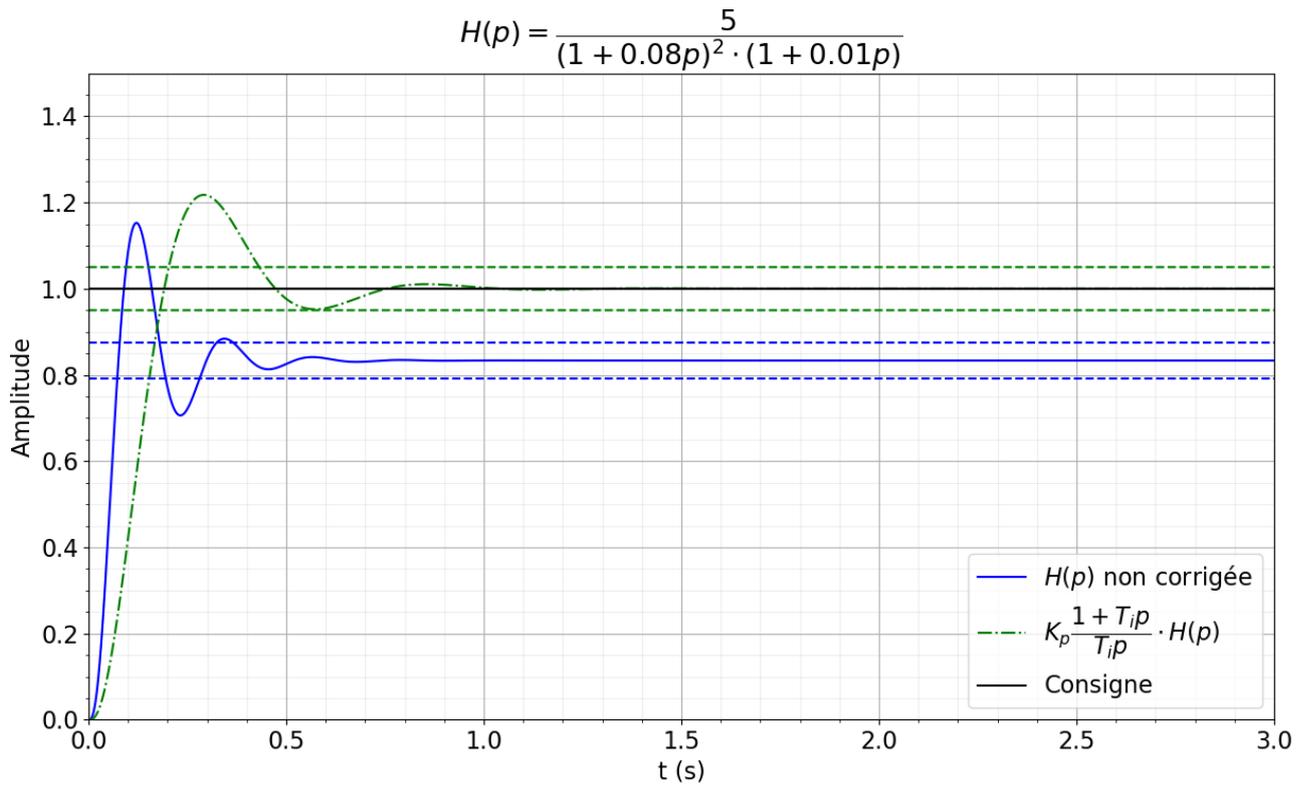


FIGURE 10 – Réponses temporelles du système corrigé et non corrigé

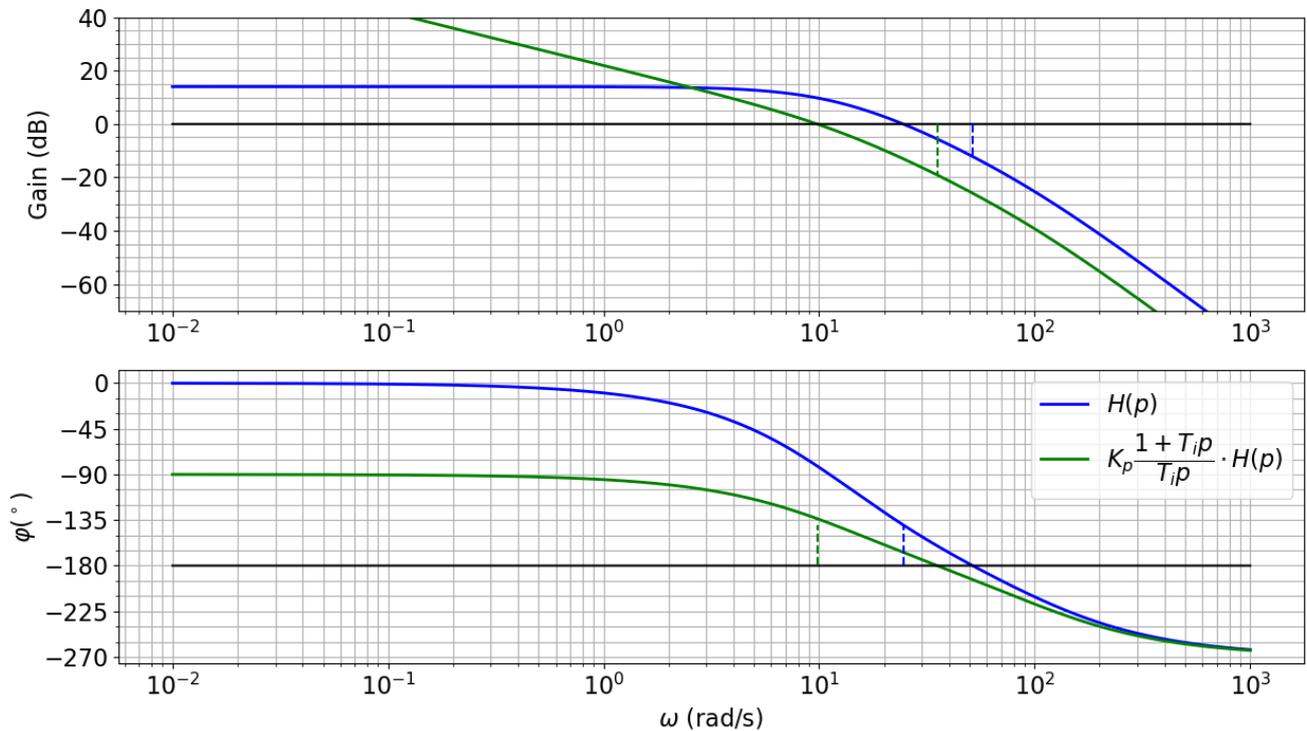


FIGURE 11 – Diagrammes de Bode du système corrigé et non corrigé

5 Synthèse d'un correcteur P.I. - Méthode du pôle dominant

Cette méthode s'applique lorsque l'on connaît la FTBO du système considéré (par exemple aux écrits...).

Le principe de cette méthode est d'éliminer de la FTBO le pôle dominant, c'est-à-dire le pôle avec la plus grande constante de temps.

Reprenons le système précédent :

$$H(p) = \frac{5}{(1 + 0.08p)^2 \cdot (1 + 0.01p)}$$

On se propose d'améliorer le comportement temporel en rendant ce système précis pour une entrée de type échelon en insérant un correcteur de type P.I..

— Démarche —

La procédure est la suivante :

- Identifier la constante de temps la plus grande.
- Choisir $T_i = T_{\max}$.
- Tracer les diagrammes de Bode pour $K_p = 1$
- Déterminer K_p afin d'obtenir les marges de gain et de phase souhaitées.

Étape 1 : Ici, $T_{\max} = 0,08$ s.

Étape 2 : $T_i = 0,08$ s le correcteur devient $C_i(p) = K_p \frac{1+0,08 \cdot p}{0,08 \cdot p}$.

Étape 3 : on trace les diagrammes de Bode pour $K_p = 1$.

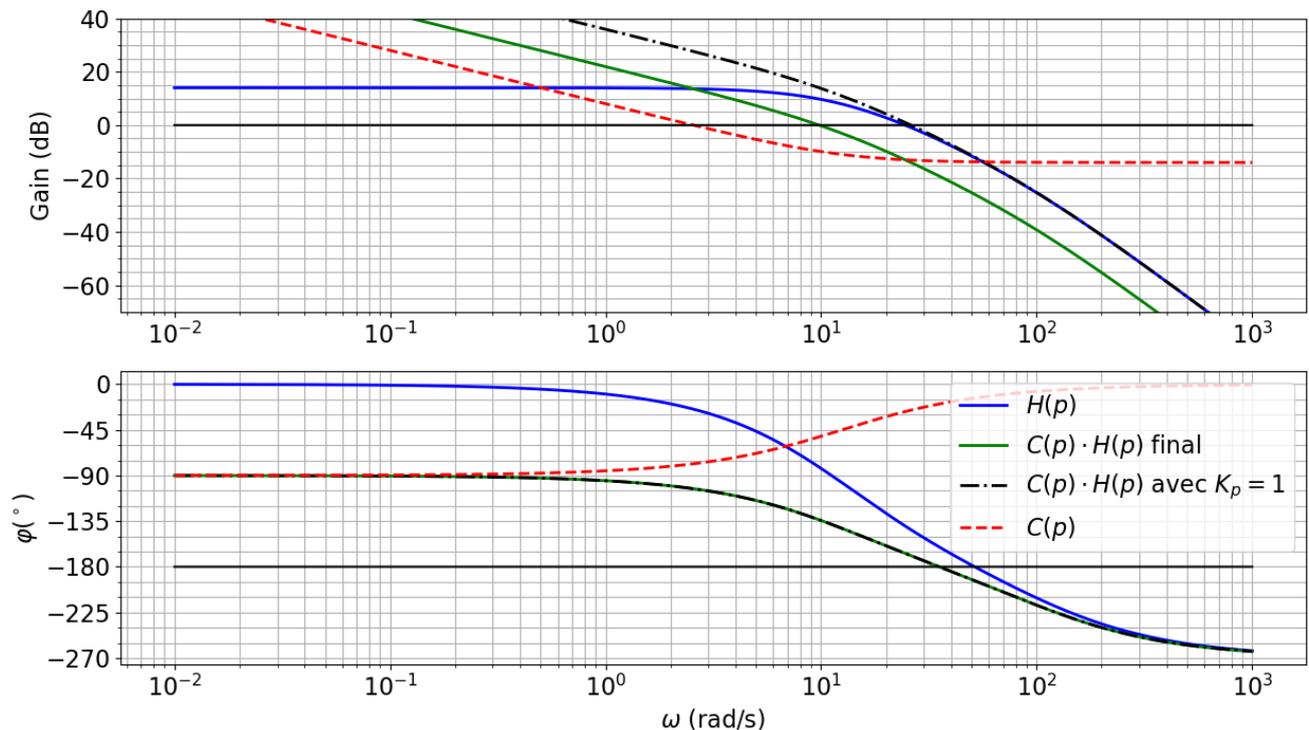


FIGURE 12 – Diagrammes de Bode du système corrigé, non-corrigé et du correcteur lui même.

Étape 4 : Il suffit de lire sur le diagramme de Bode. Pour avoir une marge de phase de l'ordre de $M_\varphi \simeq 45^\circ$ il faut abaisser la courbe telle que $\omega_{0dB} \simeq 10$ rad/s. C'est-à-dire environ 14 dB. Ce qui donne :

$$K_p = 10^{-14/20} = 0.199 \simeq 0.2$$

6 Synthèse d'un correcteur P.I. - Méthode expérimentale

Cette méthode s'applique dans un contexte expérimental (par exemple en TP...).

La fonction de transfert du système n'est pas connue algébriquement mais uniquement par une identification expérimentale. On constate que le système est fortement oscillant (marge de phase trop

petite!) et qu'il n'est pas précis. On se propose d'installer un correcteur de type P.I. pour améliorer la précision.

Démarche

La procédure de réglage est la suivante :

- Déterminer la pulsation ω_{0dB} pour laquelle le module en dB est nul.
- Régler $T_i = \frac{10}{\omega_{0dB}}$. C'est à dire régler le P.I pour que ω_{0dB} ne bouge pas...
- Tracer le diagramme de Bode de la fonction corrigée en sommant le graphe expérimental du système et celui du correcteur pour ($K_p = 1$).
- Déterminer graphiquement K_p pour avoir la marge de phase désirée.

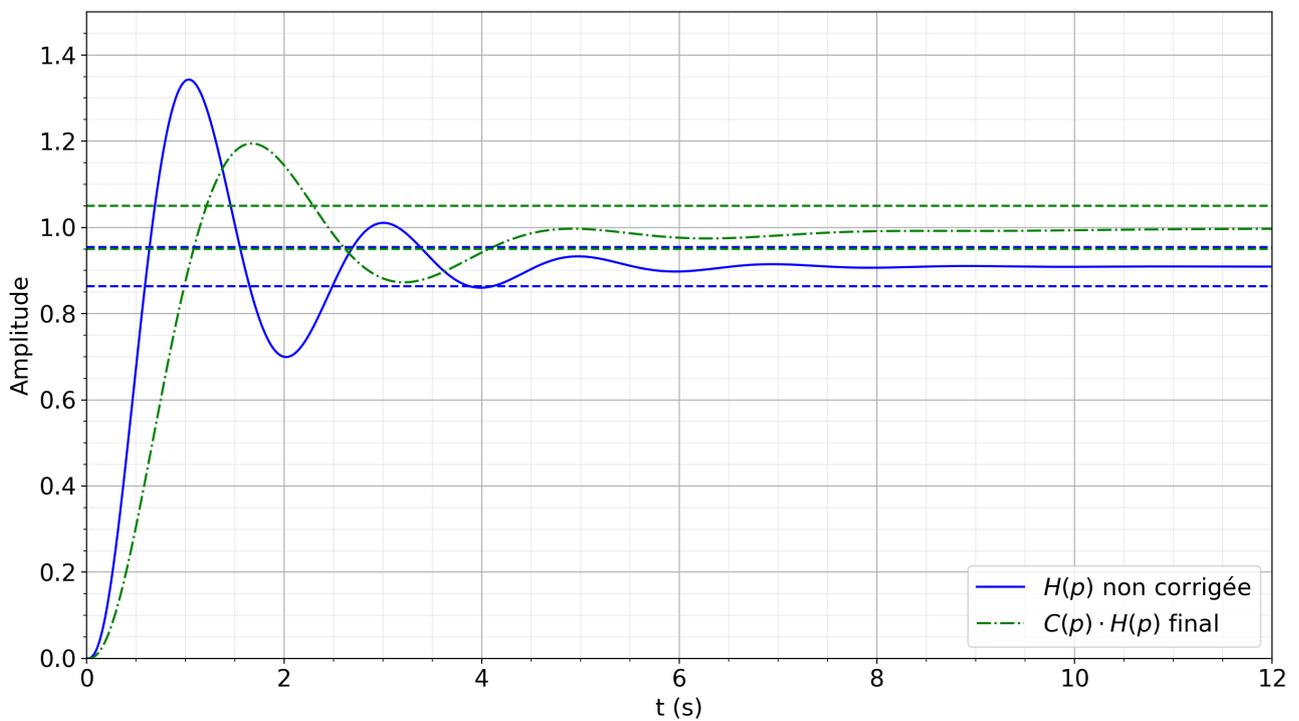


FIGURE 13 – Réponses temporelles du système avec et sans correction proportionnelle intégrale.

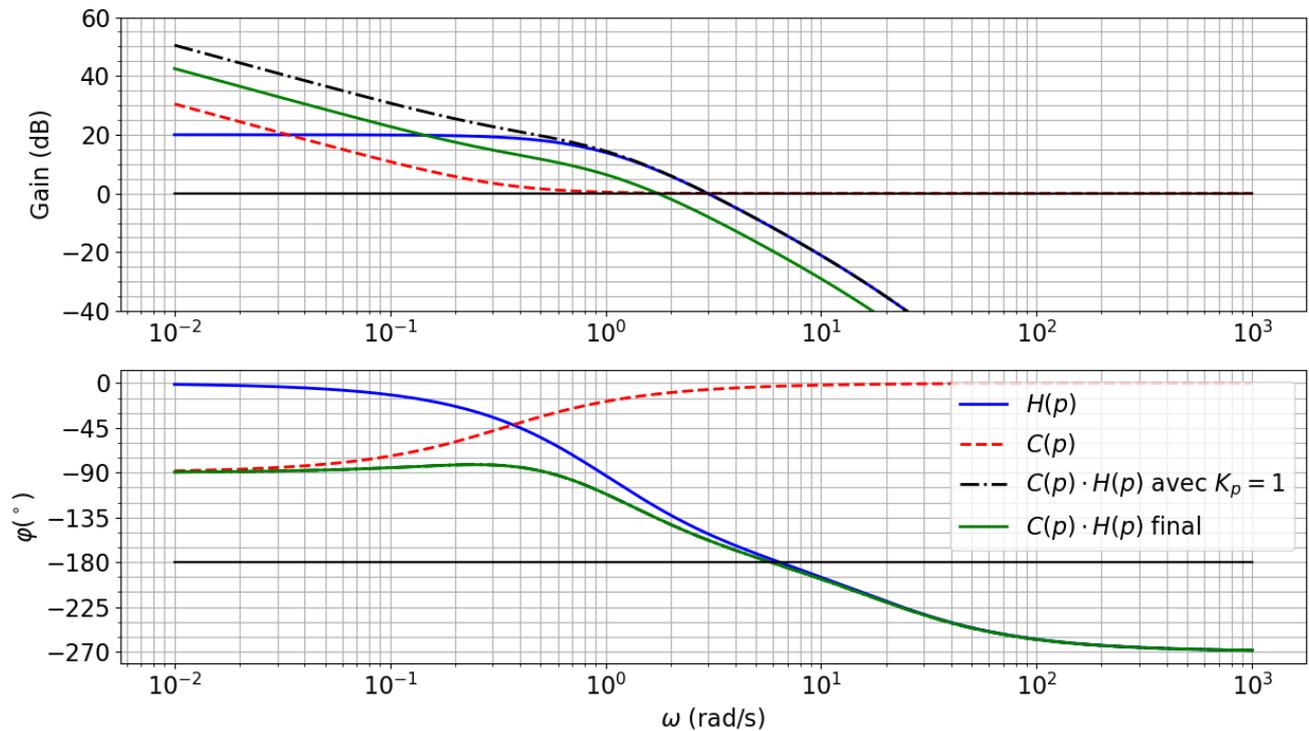


FIGURE 14 – Diagrammes de Bode du système corrigé, non-corrigé et du correcteur lui même.

Étape 1 : Ici $\omega_{0dB} = 3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Étape 2 : $T_i = \frac{10}{\omega_{0dB}} \approx 3.3 \text{ s}$

Étape 3 : On trace les diagrammes de Bode voulus.

Étape 4 : Ici pour avoir une marge de phase de 45° il faut à nouveau descendre la courbe de gain de 8 dB d'où $K_p = 10^{\frac{-8}{20}} \approx 0.4$.

Après réglage du correcteur, on constate que la réponse est beaucoup moins oscillante et que le système est précis. Nous n'avons également pas touché à la rapidité. C'est du tout bon !

7 Correcteur dérivateur

Nous avons à l'aide du correcteur proportionnel ou proportionnel intégral vu comment améliorer la précision sans trop dégrader la rapidité ou la stabilité. Cependant, reste un aspect que l'on pourrait améliorer : la marge de phase. L'objectif serait alors de remonter la phase pour limiter les dépassements et les oscillations : cela signifie avoir un numérateur au moins d'ordre 1.

7.1 Dérivateur idéal



Définition Dérivateur idéal

On appelle dérivateur idéal un correcteur dont la loi de commande du correcteur est de la forme :

$$u(t) = T_d \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad \text{soit} \quad C_{di}(p) = T_d \cdot p$$

avec T_d la constante de temps de dérivation.

Le correcteur dérivateur idéal est un correcteur purement théorique qui ne peut exister, en effet le gain de ce correcteur est infini lorsque la pulsation tend vers l'infini. Il ne respecte pas le principe de causalité en effet le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur.

7.2 Dérivateur réel

Les circuits électroniques (à base d'amplificateurs opérationnels) permettent de réaliser une forme approchée du dérivateur :

$$C_{dr}(p) = \frac{T_d \cdot p}{1 + \tau \cdot p} \quad \text{avec } \tau \ll T_d$$

Le circuit se comporte comme un dérivateur pur pour des pulsations inférieures à $\omega_{\text{lim}} \ll \frac{1}{\tau}$.



Propriété

Le correcteur dérivé apporte un gain (une avance) de phase de $+90^\circ$ pour les basses fréquences. Il a un effet stabilisant en **augmentant la marge de phase**. Le correcteur dérivé ne s'utilise jamais seul, car il **dégrade la précision en diminuant la classe du système**.

7.3 Proportionnel dérivateur

Un correcteur P.D. théorique résulte de l'association d'un correcteur proportionnel et d'un correcteur dérivé (c.f. FIGURE 15). La loi de commande du correcteur proportionnel dérivateur est de la forme :

$$u(t) = K_p \left(\varepsilon(t) + T_d \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right)$$

Il a donc une fonction de transfert du type :

$$C(p) = K_P + T_d p$$

Les fonctions de transfert associées à ces correcteurs ont la particularité d'avoir un numérateur de degré supérieur au degré du dénominateur. Pour réaliser ces correcteurs, il faut avoir une amplification très importante pour les très hautes fréquences, ce qu'aucun système physique ne permet. Les réalisations essayant d'approcher ces modèles théoriques amplifient tous les bruits et leurs grandeurs de sortie sont inexploitables.

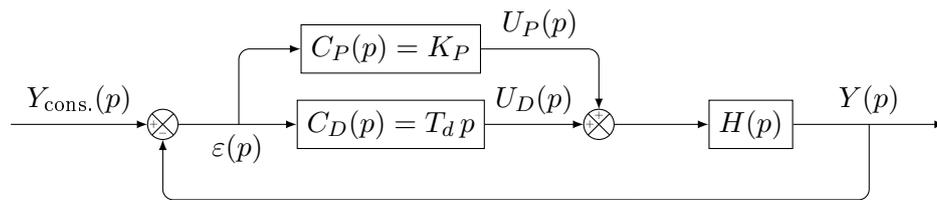


FIGURE 15 – Système asservi avec correcteur PD théorique.

Comme le dérivateur idéal, il ne peut exister de correcteur P.D. idéal dont la fonction de transfert serait :

$$C_{P.D.i}(p) = K_p (1 + T_d \cdot p)$$

Il est par contre possible de réaliser un correcteur P.D. approché de forme :

$$C_{P.D.}(p) = K_p \frac{1 + T_d \cdot p}{1 + \tau \cdot p} \text{ avec } \tau \ll T_d$$

Malgré tout, dans nos calculs, nous considérerons que le correcteur est idéal.



Propriété

Le correcteur P.D. (réel ou idéal) permet d'apporter une phase positive de $+90^\circ$ pour les hautes fréquences. Le correcteur P.D. améliore ainsi très sensiblement la marge de phase. Il a un fort effet stabilisant sans détériorer la précision (P.D. réel).



Remarque

- Pour la suite, lorsque nous aurons à étudier un correcteur P.D., en l'absence d'information contraire, il s'agira (malgré la remarque précédente) d'un correcteur P.D. idéal.
- Ce correcteur **n'est pas explicitement au programme** mais permet de comprendre l'effet du correcteur à avance de phase.

8 Correcteur à avance de phase

Pour contrer les effets négatifs du correcteur P.D. on s'intéresse donc au *correcteur à avance de phase*, qui a la particularité d'avoir **une action dérivée sur une certaine bande de fréquences**.



Définition *Correcteur à avance de phase*

Le correcteur à avance de phase est défini par la fonction de transfert :

$$C_{ap} = K_p \frac{1 + a \cdot T_a \cdot p}{1 + T_a \cdot p} \quad \text{avec } a > 1$$



Remarque

Si a est très grand on retrouve un correcteur proportionnel dérivateur réel.

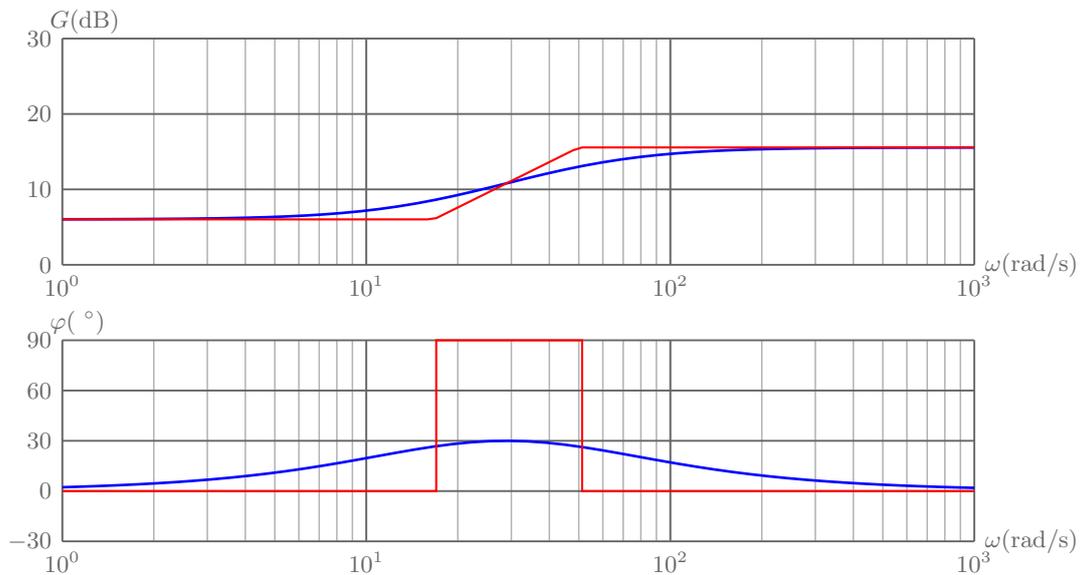


FIGURE 16 – Diagramme de BODE d'un correcteur à avance de phase (PD réel) - $H(p) = \frac{K_P(1 + aT_a p)}{1 + T_a p}$
 $a > 1$.

8.1 Impact sur les performances

On remarque, sur le diagramme de phase la principale caractéristique du correcteur à avance de phase, le correcteur ne modifie la phase que localement, sans influence sur les basses et hautes fréquences. Le module lui aussi est peu modifié, le gain des hautes fréquences est augmenté de $20 \log a$, les basses fréquences étant inchangées.

**Propriété**

- Le maximum de l'argument est atteint pour

$$\omega_{\max} = \frac{1}{\sqrt{a} \cdot T_a}$$

c'est-à-dire la moyenne géométrique des pulsations

$$\omega_{T_a} = \frac{1}{T_a} \text{ et } \omega_{aT_a} = \frac{1}{a \cdot T_a}$$

- Pour la pulsation ω_{\max} , on a :
 - Au niveau de l'argument

$$\Phi(\omega_{\max}) = \arctan\left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\right) = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$$

- Au niveau du module

$$(\text{dB})G_{dB}(\omega_{\max}) = 10 \log a$$

**Remarque**

Compte tenu du déphasage positif que l'on a entre les deux pulsations de cassure, ce correcteur, une fois réglé, permet d'augmenter la marge de phase et a une action stabilisatrice permettant d'améliorer le comportement d'un système instable ou mal stabilisé. Il permet aussi d'augmenter le gain à haute fréquence et donc a pour effet d'améliorer la rapidité du système.

**À retenir**

Le correcteur à avance de phase permet :

- de modifier localement la courbe de phase avec un effet réduit sur la courbe de gain ;
- d'améliorer les marges de stabilité (effet stabilisant) ;
- d'améliorer la bande passante du système et d'augmenter la rapidité.

Il est en général associé à un correcteur P.I. qui assure la précision, le correcteur à avance de phase va permettre de diminuer les effets négatifs du correcteur P.I. (oscillations) en augmentant la marge de phase.

9 Synthèse d'un correcteur à avance de phase - Méthode du pôle dominant

Cette méthode s'applique lorsque l'on connaît la FTBO du système considéré (par exemple aux écrits...).

Le correcteur à avance de phase est souvent utilisé lorsqu'un système présente une marge de phase insuffisante pour la pulsation de coupure à 0 dB $\omega_{0 \text{ dB}}$ du système non corrigé. Une démarche souvent utilisée est celle dite du pôle dominant :

Démarche

- On cherche à annuler la constante de temps T_{\max} du pôle dominant. Il faut l'identifier.
 - Pour l'annuler avec le numérateur du correcteur, on en déduit la constante de temps du numérateur $a \cdot T_a = T_{\max}$.
 - On détermine ensuite a en fonction de l'avance de phase souhaitée.
 - On termine avec le gain que l'on détermine pour que le gain du système corrigé soit bien 0 dB pour la pulsation $\omega_M = \frac{1}{T_a \sqrt{a}}$.
-

On verra un exemple en **TD**.

10 Synthèse d'un correcteur à avance de phase - Méthode expérimentale

Cette méthode s'applique dans un contexte expérimental (par exemple en TP...).

Cette fois-ci nous connaissons la réponse temporelle ainsi que la réponse fréquentielle en boucle ouverte du système.

Si la FTBO n'est connue que par ses diagrammes de Bode.

Démarche

1. On recherche la pulsation ω_{0dB} (*i.e.* pour laquelle le module en dB de la FTBO est nul).
2. On mesure la marge de phase pour cette pulsation.
3. On détermine a pour obtenir la marge de phase désirée à l'aide de :

$$a = \frac{1 + \sin(\Delta\varphi)}{1 - \sin(\Delta\varphi)}$$

4. On centre ensuite le correcteur sur ω_{0dB} .
 5. On trace le diagramme corrigé pour $K_p = 1$.
 6. On détermine ensuite K_p de telle sorte que pour la pulsation ω_{0dB} le gain de la FTBO corrigée soit nul.
-

Étape 1 : Ici $\omega_{0dB} = 1.7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Étape 2 : Pour avoir $M_\varphi = 45^\circ$ il faut remonter la phase de $\Delta\varphi = 32^\circ$.

Étape 3 : On obtient :

$$a = \frac{1 + \sin\left(32 \cdot \frac{2\pi}{360}\right)}{1 - \sin\left(32 \cdot \frac{2\pi}{360}\right)} \approx 3.25$$

Étape 4 : On a donc : $\frac{1}{\sqrt{a} \cdot T_a} = \omega_{0dB}$ soit ici $T_a \approx 0,32 \text{ s}$.

Étape 5 : À partir des valeurs calculées de a et T_a , on trace les diagrammes de Bode

Étape 6 : On veut avoir la même pulsation de coupure qu'auparavant, il faut abaisser la courbe de gain d'environ -4.5 dB. Ainsi :

$$K_p \approx 10^{\frac{-4,5}{20}} \approx 0.58$$

Étape 7 : On trace ensuite le diagramme corrigé, ainsi que la réponse temporelle.

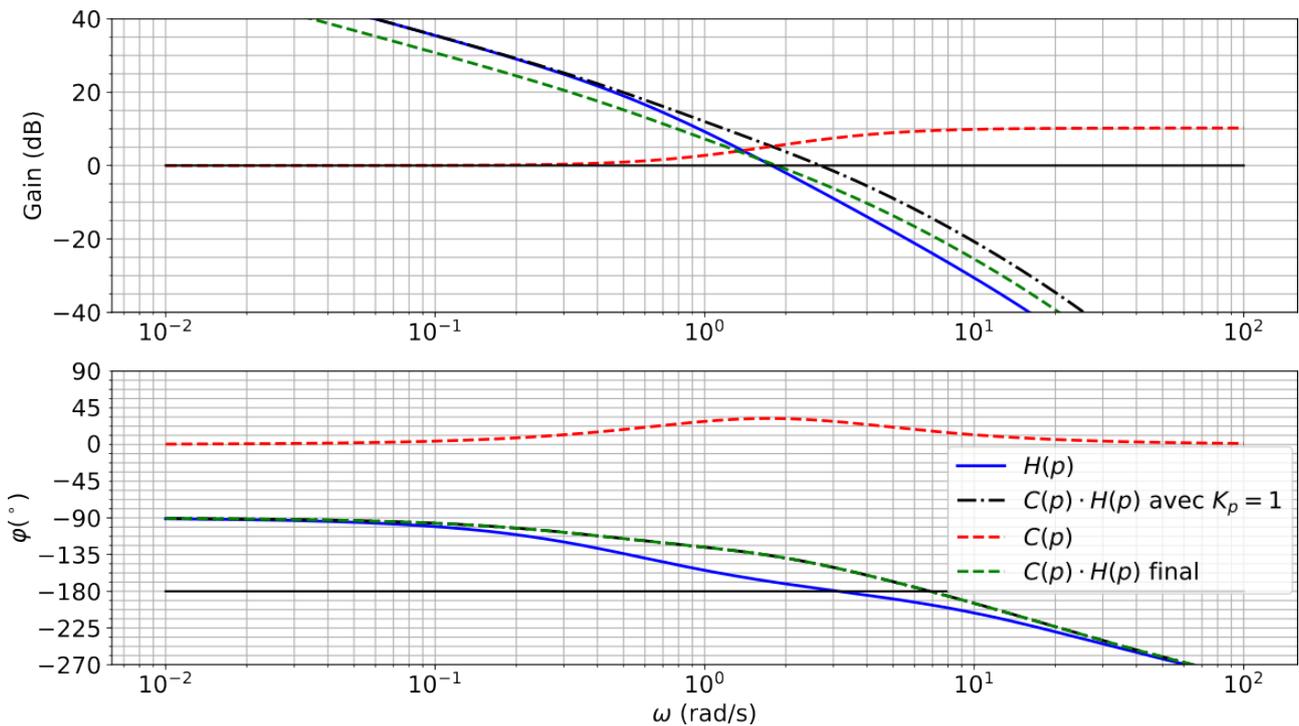


FIGURE 17 – Diagrammes de Bode de l'exemple

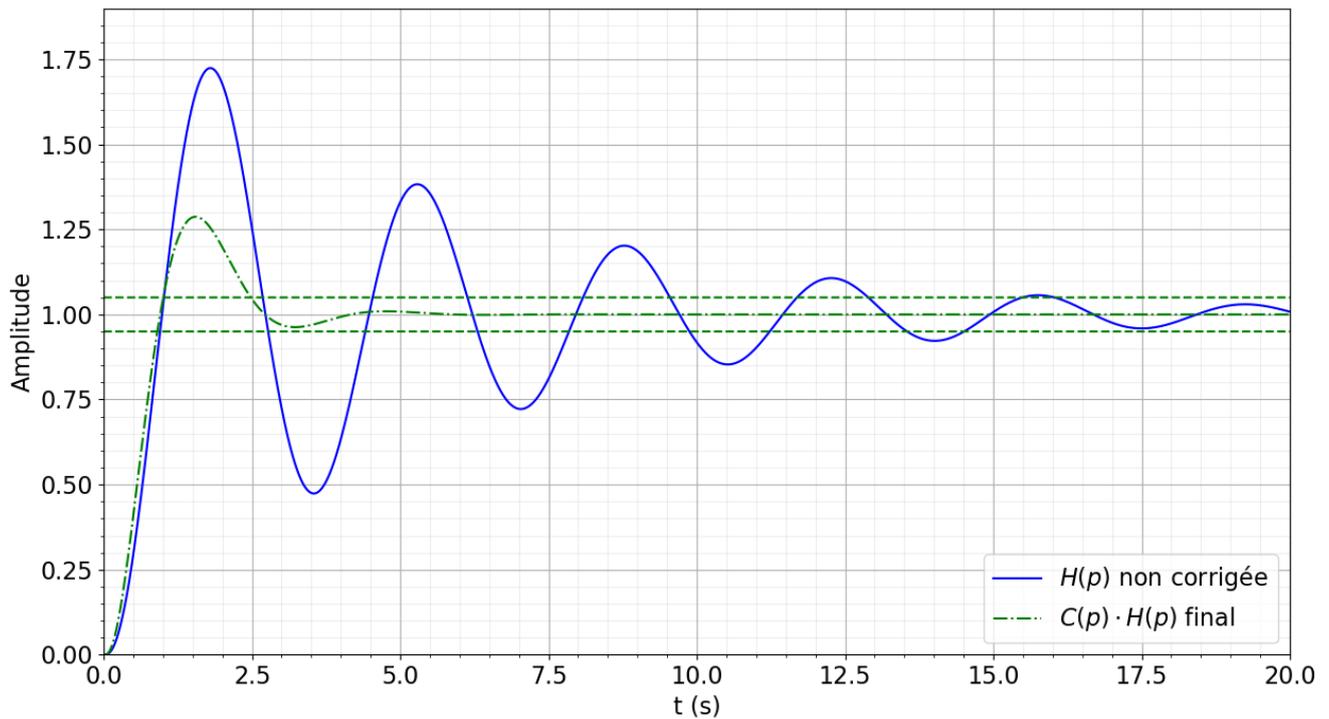


FIGURE 18 – Réponses temporelles avant et après correction.

**Remarque**

La *FTBO* tracée ici est :

$$H_{Bo}(p) = \frac{6}{1 + 1.82p + 0.01p^2} \cdot \frac{1}{p(1 + 0.05p)}$$

Et le correcteur s'écrit :

$$C(p) = 0.58 \frac{1 + 3.25 \cdot 0.32p}{1 + 0.32 \cdot p}$$

**Attention**

Vous pouvez rencontrer également un correcteur à avance de phase ayant une fonction de transfert pouvant se mettre sous la forme :

$$C(p) = \frac{K_P(1 + T_a \cdot p)}{1 + a \cdot T_a \cdot p} \quad \text{avec : } a < 1$$

Cela ne change pas grand chose, néanmoins on aura la relation suivante :

$$a = \frac{1 - \sin(\Delta\varphi)}{1 + \sin(\Delta\varphi)}$$

Ensuite on détermine de la même façon T_a pour faire coïncider la pulsation de phase maximale ω_M avec la pulsation de coupure à 0 dB $\omega_{0\text{dB}}$ du système non corrigé. On calcul donc :

$$T_a = \frac{1}{\omega_{0\text{dB}} \cdot \sqrt{a}}$$



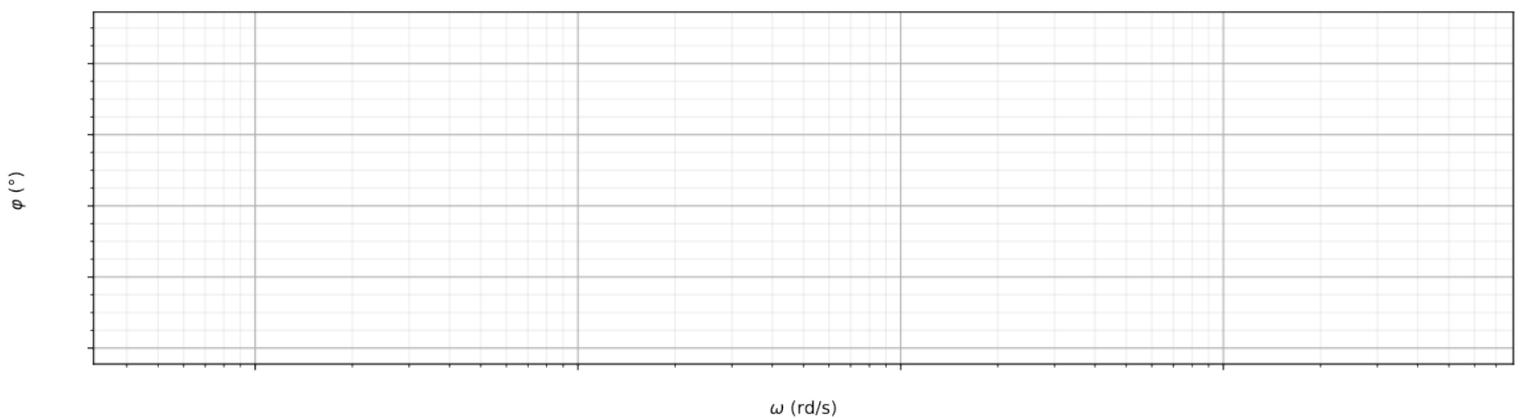
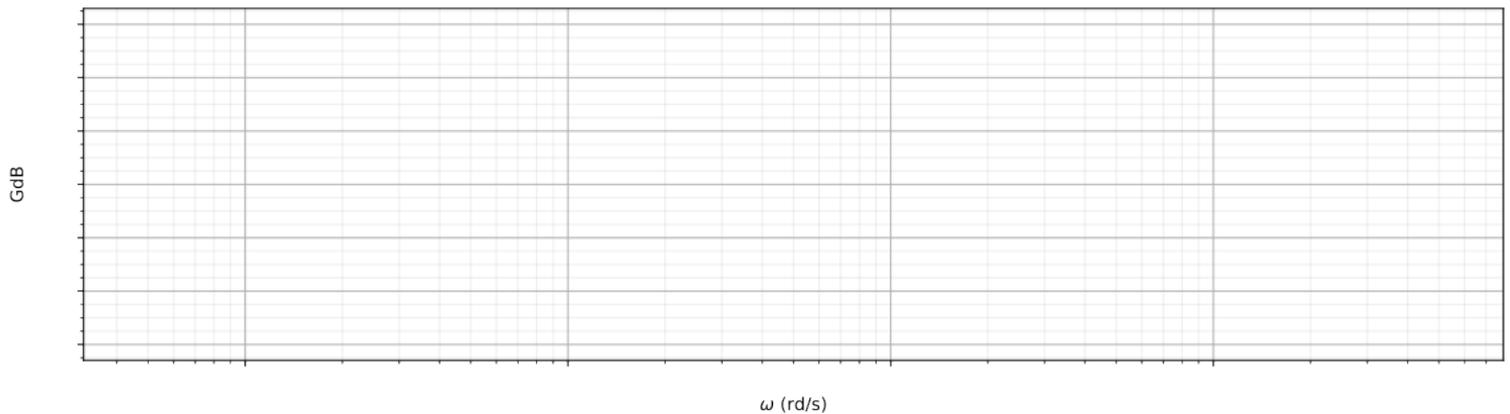
Application

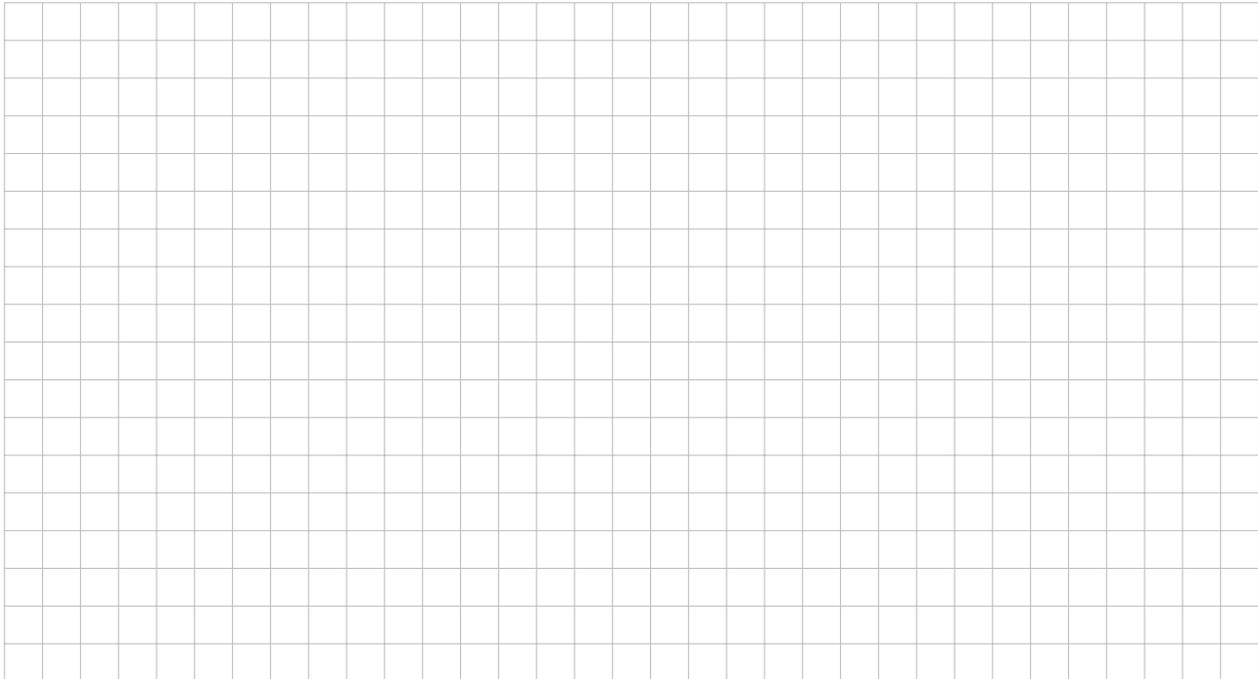
La fonction de transfert en boucle ouverte d'un système asservi à retour unitaire est :

$$H_{\text{BO}}^{\text{non corrigé}}(p) = \frac{1}{p(1+3p)(1+p)}$$

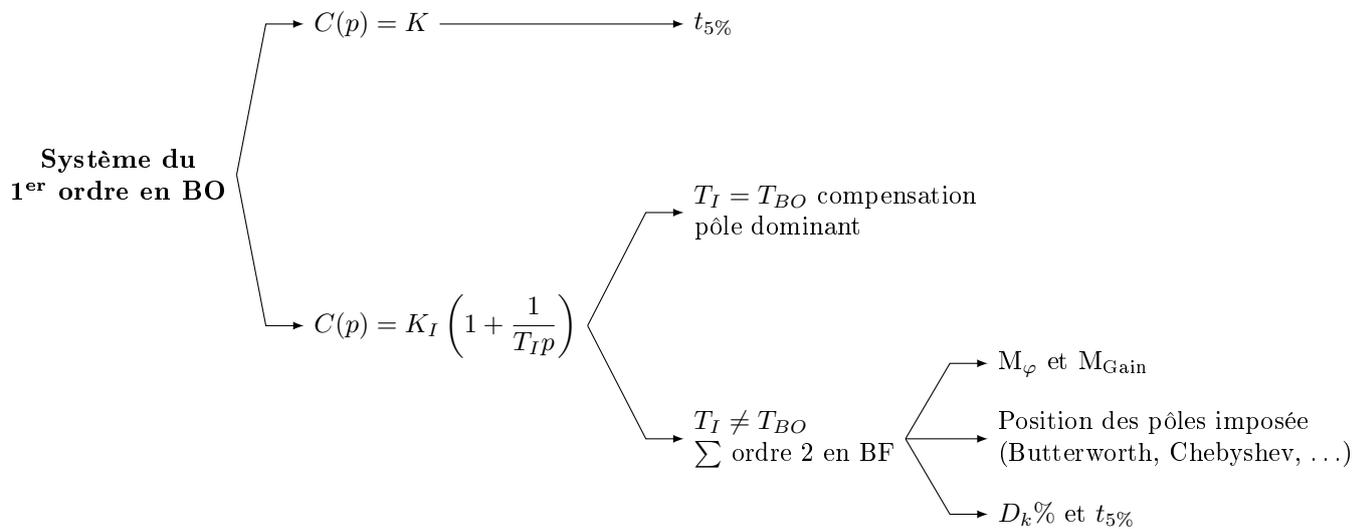
On souhaite une marge de phase $M_\varphi = 45^\circ$.

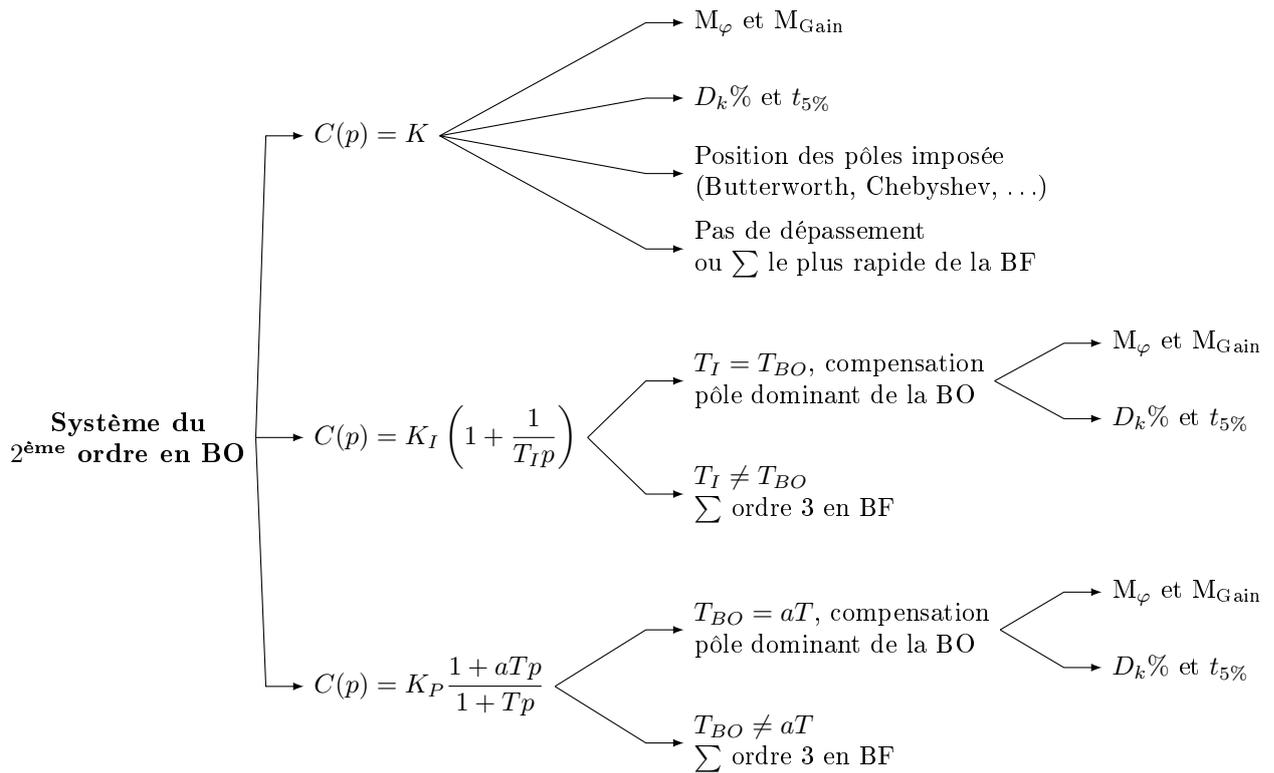
Question 1 Proposer et synthétiser un correcteur permettant d'atteindre l'objectif





11 Critères de détermination des paramètres d'un correcteur





12 Correcteurs Hors-Programme

12.1 Correcteur à retard de phase

Le correcteur PI défini précédemment est censé avoir un gain infini pour les basses fréquences, d'où le qualificatif de correcteur PI théorique. De plus, plus les puissances mises en jeu sont importantes, plus les correcteurs réels ont du mal à approcher ce résultat.

Le correcteur PI réel, aussi appelé correcteur à retard de phase, est une version transformée du correcteur PI, plus facilement réalisable. Il exerce une action intégrale limitée à une plage de fréquence.



Définition Correcteur à retard de phase

On appelle *correcteur proportionnel intégral réel*, un correcteur de fonction de transfert :

$$C(p) = \frac{K_P(1 + T_i \cdot p)}{1 + a \cdot T_i \cdot p} \quad \text{avec : } a > 1$$

Le correcteur PI réel (ou à retard de phase) est mis en œuvre pour augmenter le gain de la FTBO du système aux basses fréquences et influencer sur la précision du système (*c.f.* FIGURE ??).

On l'utilise surtout pour sa capacité à diminuer le module de la FTBO pour les hautes fréquences.

Il doit être manipulé avec précaution, car il peut rendre le système instable. Il est souvent associé à un correcteur à avance de phase.

12.2 Correcteur à retard-avance de phase

Le correcteur à avance-retard (ou retard-avance) combine les deux correcteurs précédents :

$$C_{avr}(p) = K_p \frac{1 + T_r \cdot p}{1 + b \cdot T_r \cdot p} \frac{1 + a \cdot T_a \cdot p}{1 + T_a \cdot p}$$

avec $b > 1$ et $a > 1$. On choisit souvent $a = b$.

On voit bien sur les diagrammes de Bode ci-dessous les propriétés de ce correcteur.



Propriété

- Pas d'effet sur les basses et hautes fréquences aussi bien pour le gain que pour la phase.
- Il existe une pulsation pour laquelle le gain est fortement diminué sans que l'argument soit modifié.

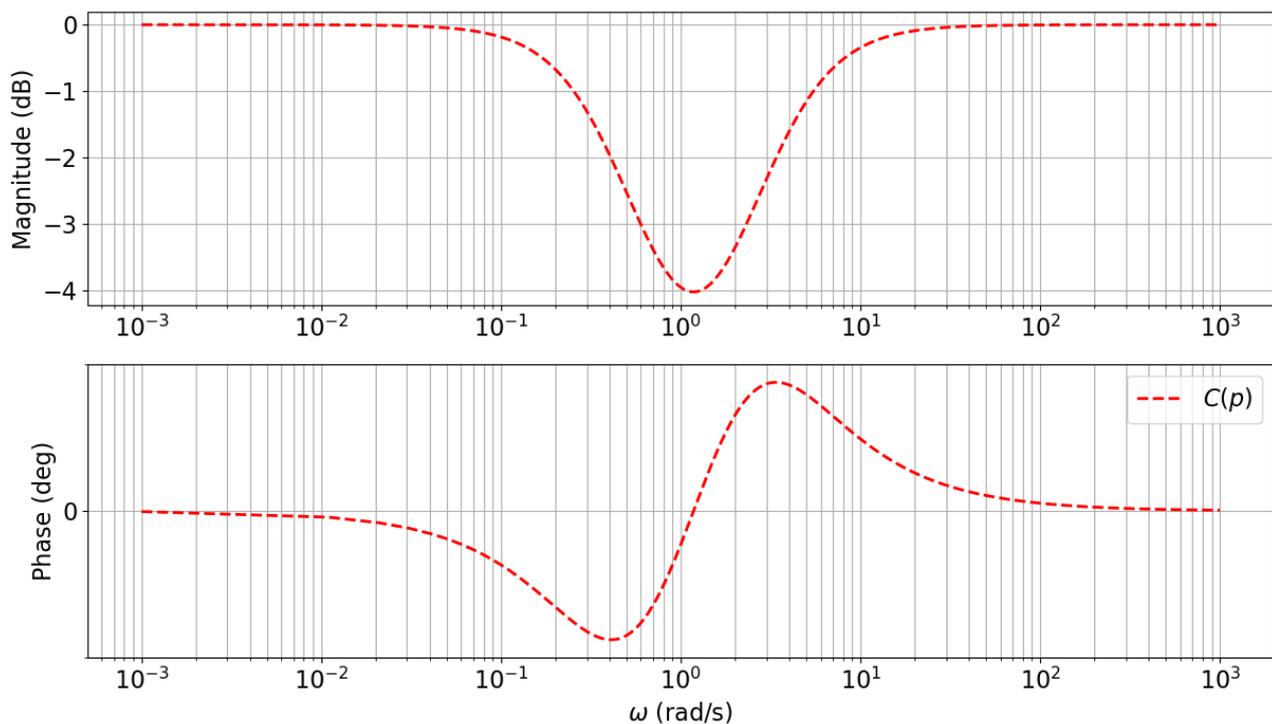


FIGURE 19 – Bode d'un correcteur à avance-retard de phase

Ce correcteur combine les avantages des correcteurs à avance de phase et à retard de phase. On l'utilise pour améliorer la marge de phase autour du point critique.

Correctement placé, il permet d'augmenter la bande passante et donc la rapidité du système.

Ce correcteur sera exploré davantage en DM

12.3 Correcteur P.I.D.

Le correcteur P.I.D. combine les effets des correcteurs proportionnel, intégrateur et dérivé. La loi de commande de ce correcteur est donc une combinaison de ces trois fonctions, plusieurs structures sont possibles.



Remarque

Le correcteur P.I.D n'est pas explicitement au programme mais ce correcteur peut être considéré comme la mise en série d'un correcteur P.I et d'un correcteur à avance de phase qui sont tous les deux au programme.

12.3.1 Structure des correcteurs P.I.D

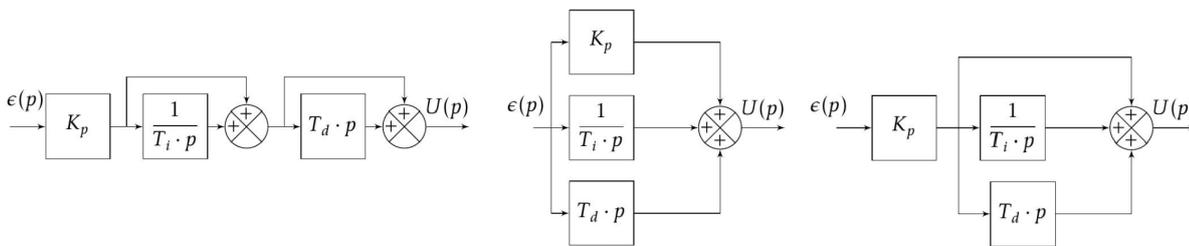


FIGURE 20 – a) P.I.D Série b) P.I.D Parallèle c) P.I.D Mixte

a) P.I.D. série :

$$C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) (1 + T_d \cdot p)$$

$$C(p) = \frac{K_p \cdot (T_i \cdot p + 1) (1 + T_d \cdot p)}{T_i \cdot p}$$

$$C(p) = \frac{K_p \cdot (1 + (T_i + T_d)p + T_i \cdot T_d \cdot p^2)}{T_i \cdot p}$$

b) P.I.D. parallèle :

$$C(p) = K_p + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p$$

$$C(p) = \frac{1 + K_p \cdot T_i \cdot p + T_d \cdot T_i \cdot p^2}{T_i \cdot p}$$

c) P.I.D. mixte :

$$C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p \right)$$

$$C(p) = \frac{K_p \cdot (1 + T_i \cdot p + T_d \cdot T_i \cdot p^2)}{T_i \cdot p}$$

**Remarque**

On constate que le degré du numérateur d'un correcteur P.I.D. est supérieur au degré du dénominateur, or comme pour le correcteur proportionnel dérivateur (P.D.) idéal, il n'existe pas de correcteur P.I.D. idéal. Un correcteur P.I.D. approché réalisable est de la forme :

$$C(p) = K_p + \frac{1}{T_i \cdot p} + \frac{T_d \cdot p}{1 + \tau \cdot p} \text{ avec } T_d \gg \tau$$

Malgré cette remarque, pour l'étude qui suit nous ne considérons que les correcteurs idéaux.

Ces trois formes ne sont pas totalement équivalentes. Il est cependant possible de passer d'un P.I.D. mixte à un P.I.D. parallèle et réciproquement.

$$\begin{aligned} C_m(p) &= K_{pm} \left(1 + \frac{1}{T_{im} \cdot p} + T_{dm} \cdot p \right) = K_{pm} + \frac{K_{pm}}{T_{im} \cdot p} + K_{pm} \cdot T_{dm} \cdot p \\ &= K_{pp} + \frac{1}{T_{id} \cdot p} + T_{dp} \cdot p = C_p(p) \end{aligned}$$

Il est toujours possible de passer d'un P.I.D. série à un P.I.D. mixte (ou parallèle)

$$C_m(p) = K_{pm} \left(1 + \frac{1}{T_{im} \cdot p} + T_{dm} \cdot p \right) = K_{pm} \frac{1 + T_{im} \cdot p + T_{im} \cdot T_{dm} \cdot p^2}{T_{im} \cdot p}$$

L'identification donne :

$$\begin{aligned} T_{im} &= T_{is} + T_{id} \\ T_{dm} &= \frac{T_{is} \cdot T_{id}}{T_{is} + T_{id}} \end{aligned}$$

Par contre dans l'autre sens, ce n'est possible que si les racines de ce qui suit sont réelles.

$$1 + T_{im} \cdot p + T_{im} \cdot T_{dm} \cdot p^2 = 0$$

On montre qu'il faut $T_{im} > 4 \cdot T_{dm}$

12.3.2 Diagrammes de Bode

La figure ci-dessous présente les diagrammes de Bode d'un correcteur P.I.D. de type série

$$C_s(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) (1 + T_d \cdot p)$$

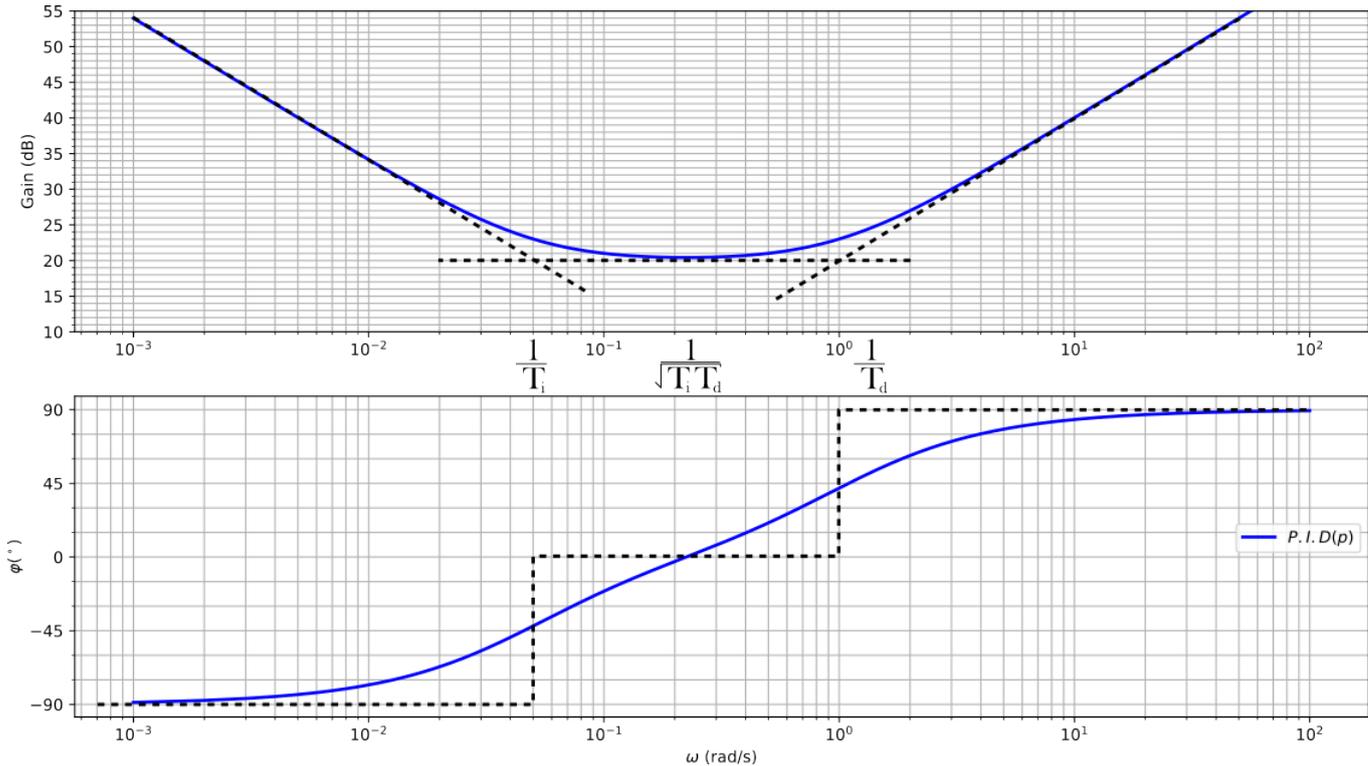


FIGURE 21 – Diagramme de Bode d'un correcteur PID Série, avec $T_i = 20$ s, $K_p = 10$ et $T_d = 1$ s.

On constate :

- une intégration à basse fréquence ($\omega < \frac{1}{T_i}$) caractérisée par :
 - une pente de -20 dB/dec
 - un déphasage de -90° du diagramme de phase
- une zone plus ou moins large ($\frac{1}{T_i} < \omega < \frac{1}{T_d}$) dans laquelle le gain varie peu ($20 \log(K_p)$)
- un fonctionnement de type dérivateur pour les hautes fréquences ($\omega > \frac{1}{T_d}$) caractérisé par :
 - une pente positive de $+20$ dB/dec
 - une avance de phase de $+90^\circ$

12.3.3 Synthèse d'un correcteur PID - pôle dominant

Méthode applicable si le système à corriger est connu par sa fonction de transfert en boucle ouverte.

Le réglage d'un correcteur P.I.D. est relativement complexe car, il s'agit ici de régler trois paramètres. Ici, nous allons utiliser une méthode que l'on a déjà utilisée pour la synthèse du PI.

Démarche

Un correcteur P.I.D. comportant deux constantes de temps (si $T_i > 4 \cdot T_d$) permet d'annuler algébriquement deux constantes de temps du système à corriger (T_i compensant la plus grande et T_d la suivante).

1. Détermine le pôle dominant T_{max}
2. Prendre $T_i = T_{max}$ pour l'annuler à l'aide du numérateur.
3. Faire de même pour le seconde pôle dominant T_{max-2} .

4. Prendre $T_d = T_{max-2}$ pour l'annuler à l'aide du numérateur.
5. Tracer la réponse en boucle ouverte du système ainsi corrigé avec $K_p = 1$.
6. Déterminer K_p en fonction du cahier des charges ($M_G()$ ou $M_\varphi()$)

Ici on étudie le système caractérisé par le schéma bloc suivant :

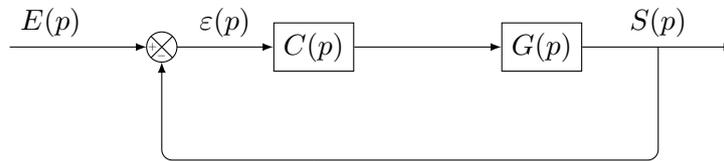


FIGURE 22 – Système à retour unitaire avec un correcteur.

avec :

$$G(p) = \frac{40}{(1 + 0,12 \cdot p + 0,01 \cdot p^2)(1 + 0,5 \cdot p)(1 + 5 \cdot p)}$$

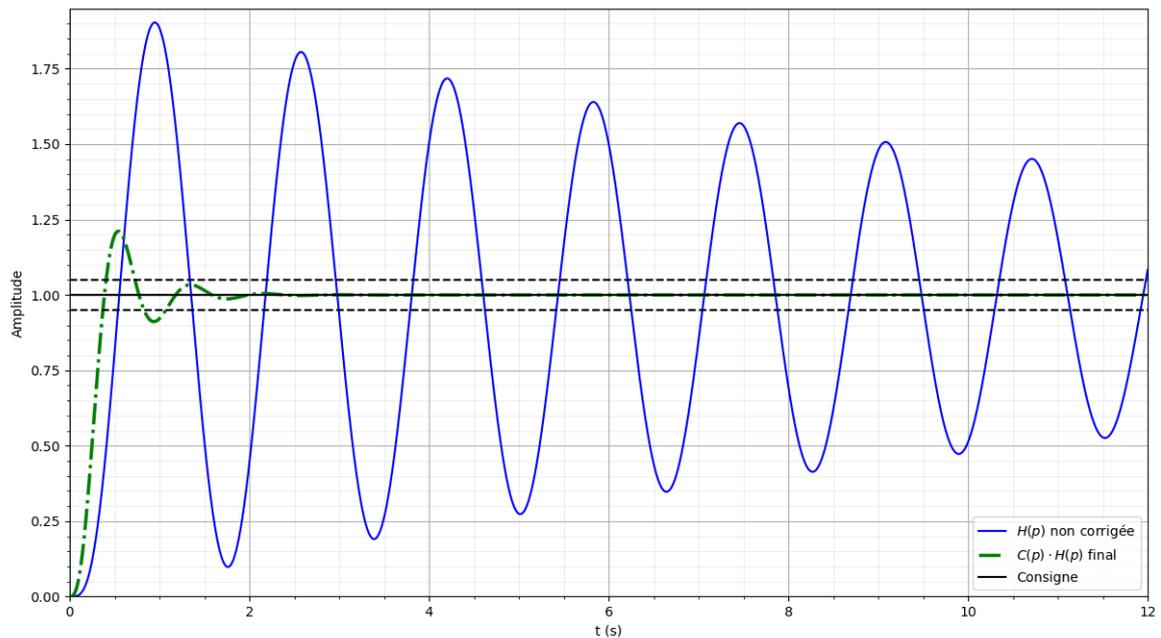
et $C(p)$ un correcteur P.I.D en série :

$$C_s(p) = K_{ps} \left(1 + \frac{1}{T_{is} \cdot p} \right) (1 + T_{ds} \cdot p)$$

Le cahier des charges précise :

- erreur indicielle nulle
- marge de phase supérieure à 45°
- temps de réponse à 5% inférieur à 1 s

Ci-dessous se trouvent les réponses temporelles, corrigée et non corrigée, du système étudié.



On remarque que le système non corrigé est très fortement oscillant, non précis et que son temps de réponse est bien supérieur à celui toléré dans le cahier des charges.

Détermination du correcteur :

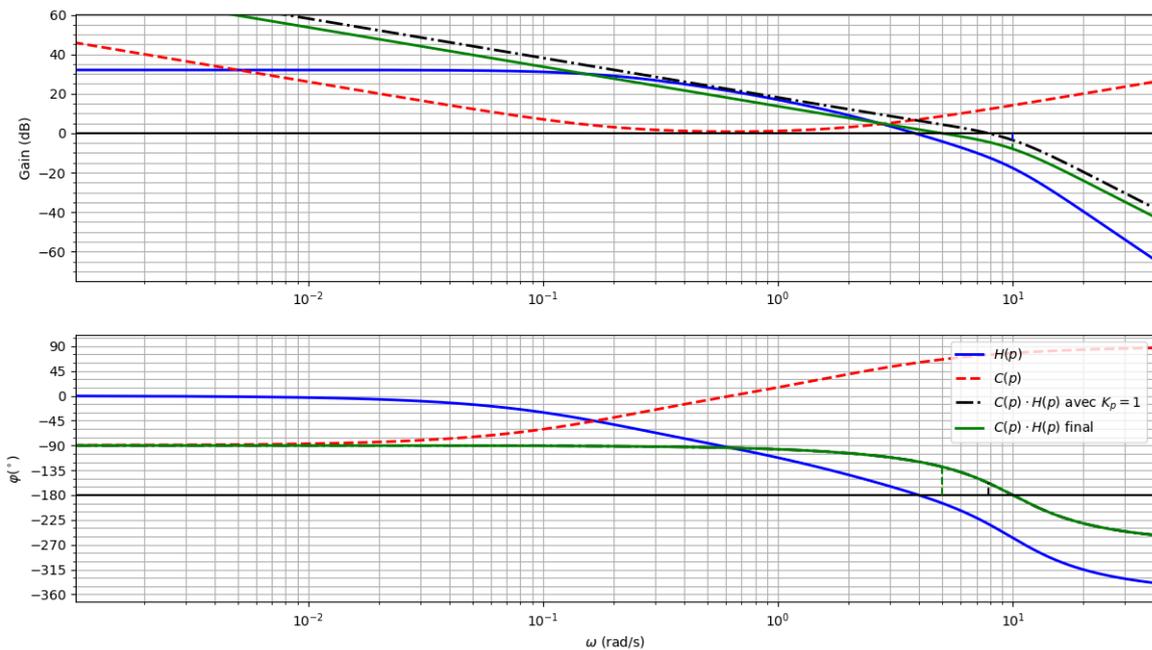
- on associe la plus grande des constantes de temps à la constante d'intégration $T_{is} = T_1 = 5$ s
- on associe la suivante à la constante de dérivation $T_{ds} = T_2 = 0,5$ s
- dans un premier temps on pose $K_{ps} = 1$
- d'où le correcteur P.I.D.

$$C_s(p) = \left(1 + \frac{1}{5 \cdot p}\right) (1 + 0,5 \cdot p) = \frac{(1 + 5 \cdot p)(1 + 0,5 \cdot p)}{5 \cdot p}$$

La FTBO devient :

$$BO(p) = C_s(p) \cdot G(p) = \frac{55}{5 \cdot p \cdot (1 + 0,1 \cdot p)}$$

- on trace les diagrammes de Bode de la fonction corrigée
- on constate que $M_\varphi()$ est insuffisante. Il faut donc ajuster K_{ps} . Pour cela, on recherche sur la courbe de phase la pulsation correspondant à un déphasage de $-180 + 50 = -130^\circ$ que l'on reporte sur la courbe de gain.
- manifestement on doit « descendre » la courbe de gain de -4 dB soit un gain $K_{ps} = 10^{\frac{-4}{20}} \approx 0,63$



On peut alors observer la réponse maintenant corrigée, qui est conforme au cahier des charges. Le correcteur obtenu est donc :

$$C_s(p) = 0,63 \frac{(1 + 5 \cdot p)(1 + 0,5 \cdot p)}{5 \cdot p}$$