# Évaluations des performances des S.L.C.I : Précision/Rapidité

TD

v1.1 Ⓟ

*Institution Sainte Marie – 2 Rue de l'Abbaye - 92160 Antony*

## Table des matières


**1 Exercice 1 - Étude de la précision d'un système 2**

**2 Exercice 2 - Étude de la précision d'un système en considérant une perturbation 3**

**3 Exercice 3 - Régulation de vitesse angulaire 3**

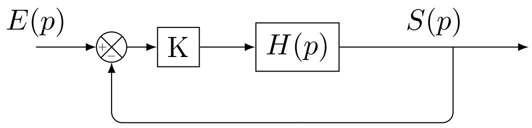
**4 Exercice 4 - Temps de réponse et bande passante 7**

**5 Exercice 5 - Bande passante 8**

**6 Exercice 6 - Réglage d'un correcteur proportionnel 9**

# 1 Exercice 1 - Étude de la précision d'un système

Nous allons considérer le système représenté par le schéma-bloc suivant :




$$\text{avec } H(p) = \frac{5}{2+0,1p}, H(p) = \frac{3}{p(1+0,1p)}, H(p) = \frac{1}{1+p+3p^2}$$

**Question 1** En utilisant le tableau du cours, déterminer pour une entrée $e(t) = e_0 u(t)$ l'écart statique de position en prenant $K = 1$. Dans chaque cas, calculer le gain statique de la fonction de transfert en boucle fermée.

- cas 1 : $H(p) = \dfrac{5}{2+0,1p}$ ;
  On est dans le cas d'un retour unitaire, dans ce cas l'erreur et l'image de l'erreur sont les mêmes.
  $H_{BO}(p) = \dfrac{5}{2+0,1p} = \dfrac{5/2}{1+0,05p}$
  La FTBO est de classe 0 et de gain statique 2,5 .
  On a donc une erreur en régime permanent de $\dfrac{1}{1+2,5} = \dfrac{1}{3,5}$
  On peut bien sur vérifier ce résultat en utilisant la FTBF et le théorème de la valeur finale : $\lim_{t\to+\infty} e_r(t) = \lim_{p\to 0} p \cdot E_r(p) = \lim_{p\to 0} p(E(p) - S(p)) = \lim_{p\to 0} pE(p)\,(1 - H_{BF}(p)) = \lim_{p\to 0} p\dfrac{1}{p}\left(1 - \dfrac{5/7}{1+0,1/7}p\right) = \dfrac{1}{3,5}$
- cas 2 : $H(p) = \dfrac{3}{p(1+0,1p)}$.
  La FTBO est de classe 1.
  On a donc erreur en régime permanent nulle.
- cas 3 : $H(p) = \dfrac{5}{1+p+3p^2}$.
  La FTBO est de classe 0 et de gain statique 5 .
  On a donc une erreur en régime permanent de $\dfrac{1}{1+5} = \dfrac{1}{6}$

**Question 2** Déterminer $K$ pour avoir une erreur relative de positon inférieure à 1%.

- cas 1 :
  On souhaite que : $e_{r\%}(+\infty) = \dfrac{e_r(+\infty)}{e(+\infty)} = \dfrac{\frac{1}{1+K_{BO}}}{1} < 1\%$
  On veut donc que : $\dfrac{1}{1+K2,5} < \dfrac{1}{100} \Rightarrow K > \dfrac{99}{2,5}$
- cas 2 :
  Quelle que soit la valeur de $K$, l'erreur de position est nulle car la FTBO est de classe 1.
- cas 3 :
  On veut que : $\dfrac{1}{1+K5} < \dfrac{1}{100} \Rightarrow K > \dfrac{99}{5}$

## 2 Exercice 2 - Étude de la précision d'un système en considérant une perturbation

On considère le système suivant :

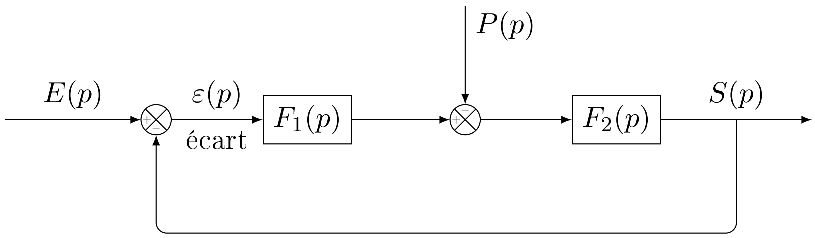



FIGURE 1 – Système asservi perturbé à retour unitaire.

$$\text{avec } F_1(p) = \frac{10}{1+0,2p} \text{ et } F_2(p) = \frac{20}{p(1+0,4p)}$$

**Question 1** Déterminer pour une entrée $e(t) = e_0 u(t)$ et pour une perturbation $p(t) = p_0 u(t)$, l'écart statique de position total.

L'écart statique global va être la somme de celui engendré par l'entrée, et de celui engendré par la perturbation. on va les calculer séparément.

$$\varepsilon_t = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

Par le tableau des écarts :

$$\varepsilon_e = 0$$

En effet, la FTBOest de classe 1 avec l'intégration de $F_2(p)$, l'écart statique indiciel est donc nul.
En revanche :

$$\varepsilon_p = \frac{p_0}{K_1} = \frac{p_0}{10}$$

Ainsi :

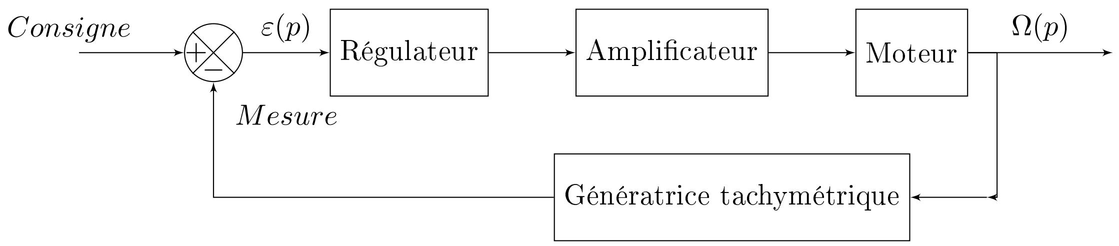
$$\varepsilon_t = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{p_0}{10}$$

**Question 2** Quelle(s) modification(s) peut-on apporter pour améliorer la précision.

Pour annuler l'erreur due à la perturbation il faut qu'il y ait une intégration **AVANT** la perturbation... Un correcteur avec action intégrale peut-être ?

## 3 Exercice 3 - Régulation de vitesse angulaire

On s'intéresse au système de régulation de vitesse suivant :




Le moteur a pour fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{10}{(1+0,001p)(1+0,02p)}$

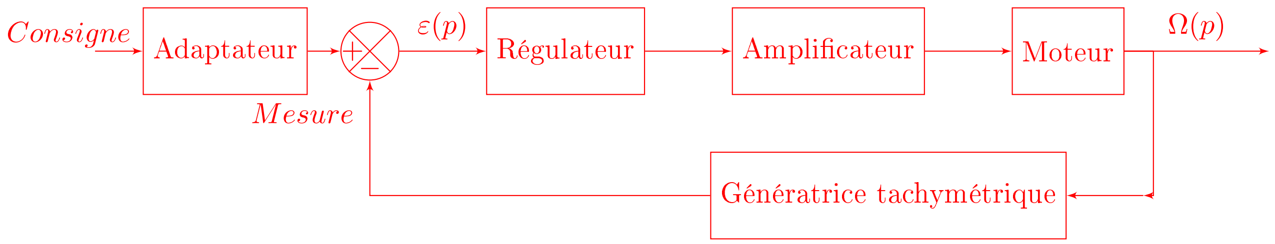
L'amplificateur de puissance possède un gain en tension $G = 10$

La génératrice tachymétrique est modélisée par un gain pur de $0,1\ \mathrm{V \cdot s}$

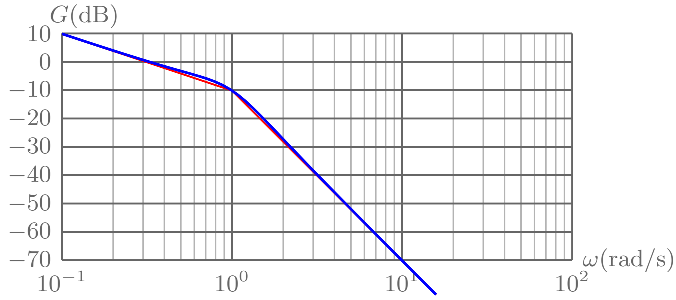
La fonction de transfert du régulateur est notée $R(p)$. On suppose que le régulateur de vitesse a une action proportionnelle $R(p) = K$

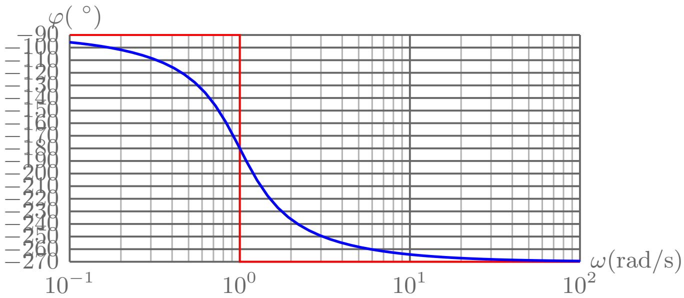
**Question 1** Le système de régulation ci-dessus est il un asservissement ? *Il vous faut vous questionner sur la nature des grandeurs circulant entre les blocs.* Le schéma-bloc donné n'est pas correct car la consigne et l'image de la sortie ne sont pas des **grandeurs homogènes**, elles ne peuvent donc pas être comparées par le comparateur. C'est le rôle de l'adaptateur.

**Question 2** Proposer une modification de ce schéma-bloc pour que cela soit en accord avec la question précédente.




**Question 3** Tracer le diagramme de Bode asymptotique de la $FTBO$ pour $K = 1$.




**Question 4** Discuter de la stabilité en boucle fermée de ce système en fonction des valeurs de $K$. Pour $K = 1$, le système est stable. La marge de phase est supérieure à 60° et la marge de gain est non définie, En effet, $\forall \omega$ on a $\varphi(\omega) > -180°$. (la courbe de phase ne coupe jamais la droite d'équation $\varphi° = -180°$ ).

Lorsque $K$ augmente, $K_{BO} = 10K$ augmente : la courbe de gain est translatée vers le haut. La marge de phase diminue car $\omega_{0dB-BO}$ augmente.

Le système reste stable en théorie. Quelle que soit la valeur de $K$, la courbe de phase ne coupe jamais la droite d'équation $\varphi° = -180°$, mais la marge de phase peut devenir insuffisante en pratique, au regard des exigences d'un cahier des charges.

La marge de gain reste non définie, quelle que soit la valeur de $K$.

**Question 5** Donner la valeur du gain $K$ qui assure au système en boucle fermée un facteur d'amortissement $z = 0,7$. On prend donc $K_{adapt} = K_{gene} = 0.1\,V \cdot s$ pour que le système soit *bien asservi.* On a :

$$H_{BF}(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)} = 0,1 \frac{\dfrac{K \cdot 100}{(1+0,001p)(1+0,02p)}}{1 + \dfrac{K10}{(1+0,001p)(1+0,02p)}} = 0,1 \frac{K \cdot 100}{(1+0,001p)(1+0,02p) + 10K}$$
$$= \frac{K10}{10K + 1 + 0,021p + 2 \times 10^{-5}p^2}$$

$$H_{BF}(p) = \frac{\dfrac{10K}{10K+1}}{1 + \dfrac{0,021}{10K+1}p + \dfrac{2 \times 10^{-5}}{K10+1}p^2} = \frac{K_{BF}}{1 + \dfrac{2z}{\omega_0}p + \dfrac{1}{{\omega_0}^2}p^2}$$

Par identification : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{10K+1}{2 \times 10^{-5}}}$ et $z = \dfrac{1}{2}\dfrac{0,021}{10K+1}\sqrt{\dfrac{10K+1}{2 \times 10^{-5}}}$

Si on souhaite un facteur d'amortissement $z = 0,7$, il faut que :

$$0,7 = \frac{1}{2}\frac{0,021}{10K+1}\sqrt{\frac{10K+1}{2\times 10^{-5}}} \Rightarrow 0,7 = \frac{0,021}{2\sqrt{2\times 10^{-5}}}\frac{1}{\sqrt{10K+1}} \Rightarrow K = \frac{1}{10}\left(\left(\frac{0,021}{0,7\times 2\sqrt{2\times 10^{-5}}}\right)^2 - 1\right)$$

Soit $K = 1,025$

**Question 6** Calculer l'image de l'erreur en régime permanent vis-à-vis d'une consigne équivalente à une vitesse $\Omega_0$ constante. Indiquer comment annuler cet écart. On a : $H_{BO}(p) = \dfrac{10\cdot K}{(1+0,001\cdot p)(1+0,02\cdot p)}$

La $FTBO$ est de classe 0 et de gain statique $K_{BO} = 10\times K = 10,25$.

On a donc une erreur de $\dfrac{\Omega_0}{1+K_{BO}} = \dfrac{\Omega_0}{11,25}$ et une image de l'erreur de $0,1\times\dfrac{\Omega_0}{11,25}$.

Pour annuler cet écart, il faut augmenter la classe de la FTBO en mettant un intégrateur dans la boucle.

# 4 Exercice 4 - Temps de réponse et bande passante

Un système du premier ordre est régi par la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$$

**Question 1** Donner l'expression de la largeur de la bande passante à $-6$ dB.

**Rappel**

$\omega_{-6dB-BF}$ est la pulsation à partir de laquelle le gain de la FTBF est atténué de 50% par rapport à une valeur de référence qui est en général la valeur du gain pour les basses pulsation ($\omega \to 0$) puisque l'on travaille essentiellement sur systèmes qui se comportent en filtres passe-bas.

Ainsi $\omega_{-6\text{ dB}-\text{BF}}$ est la pulsation telle que :

$$G(\omega - 6\text{ddB} - \text{BF}) = 50\% \times G(\omega \to 0) = 0,5 \times G(\omega \to 0)$$
$$G_{dB}(\omega_{-6dB-BF}) = G_{dB}(\omega \to 0) + 20\log(0,5)$$
$$G_{dB}(\omega_{-6\text{ dB}-\text{BF}}) = G_{dB}(\omega \to 0) - 6\text{ dB}$$

Or $G(\omega \to 0) = K_{BF}$ on a donc : $G_{dB}(\omega \to 0) = 20 \cdot \log K_{BF}$

*(résolution analytique)* On cherche donc $\omega_{-6\text{ dB}-\text{BF}}$ telle que :

$$G(\omega_{-6\text{ dB}-\text{BF}}) = 0,5K_{BF}$$

Ou *(résolution graphique)* On cherche donc $\omega_{-6dB-BF}$ telle que :

$G_{dB}(\omega_{-6dB-BF}) = 20\log K_{BF} - 6$ dB

Dans notre cas, on cherche $\omega_{-6\text{ dB}-\text{BF}}$ tel que : $G(\omega_{-6\text{dd}-\text{BF}}) = 0,5\text{ K}$

Or on a : $G(\omega_{-6\text{ dB}-\text{BF}}) = \dfrac{K}{\sqrt{1+\tau^2\omega_{-6\text{ dB}-\text{BF}^2}}}$

On cherche donc $\omega_{-6\text{ dB}-\text{BF}}$ tel que :

$$G(\omega_{-6\text{dd}-\text{BF}}) = 0,5\text{ K} \Rightarrow \omega_{-6\text{dd}-\text{BF}} = \sqrt{\frac{3}{\tau^2}}$$

La bande passante à $-6$ dB est donc : $\omega \in \left]0, \dfrac{\sqrt{3}}{\tau}\right]$

**Question 2** Donner l'expression de son temps de réponse à 5%.

On a , pour un modèle usuel du $1^{\text{er}}$ ordre : $t_{5\%} = 3 \times \tau$

**Question 3** Sur quel paramètre doit-on agir pour augmenter la rapidité du système ?

Pour augmenter la largeur de la bande passante et diminuer le temps de réponse à 5% d'un système du $1^{\text{er}}$ ordre, il faut diminuer sa constante de temps $\tau$

Ce même système est bouclé par un retour unitaire.

**Question 4** Donner l'expression de la largeur de la bande passante à $-6$ dB.

$$\text{FTBF} : H(p) = \frac{\frac{K}{1+\tau\cdot p}}{1+\frac{K}{1+\tau\cdot p}} = \frac{K}{1+\tau\cdot p+K} = \frac{\frac{K}{K+1}}{1+\frac{\tau}{K+1}\cdot p} = \frac{K'}{1+\tau'\cdot p}$$

La bande passante à $-6$ dB est donc : $\omega \in 0, \frac{\sqrt{3}}{\tau}$ avec $\tau' = \frac{\tau}{K+1}$

**Question 5** Donner l'expression de son temps de réponse à 5%.

$t_{5\%} = 3 \times \tau' = \frac{3\cdot\tau}{K+1}$

**Question 6** Sur quel paramètre doit-on agir pour augmenter la rapidité du système ?

Pour augmenter la largeur de la bande passante et diminuer le temps de réponse à 5%, il faut diminuer la constante de temps $\tau'$. Pour cela, on peut :

- diminuer $\tau$
- augmenter $K$

**Question 7** Conclure.

Lorsque le système est bouclé, une augmentation de son gain statique influe sur les critères (temps de réponse à 5% et largeur de la bande passante à $-6$ dB ) associés à la performance de rapidité.

On peut aussi remarquer que le système bouclé est plus rapide que le système non bouclé.

## 5 Exercice 5 - Bande passante

**Question 1** Déterminer les bandes passantes à $-3$ dB des systèmes bouclés modélisés par les fonctions de transfert suivantes :

$$H_1(p) = \frac{1}{p+1} \quad H_2(p) = \frac{60}{(p+2)(p+6)}$$

- Cas 1 : $H_1(p) = \frac{1}{p+1}$

On a : $G\left(\omega_{-3\ \text{dB}-\text{BF}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_{-3\ \text{dB}-\text{BF}}{}^2}}$

On cherche donc $\omega_{-3\ \text{dB}-\text{BF}}$ tel que :

$$\frac{1}{\sqrt{1+\omega_{-3\ \text{dB}-\text{BF}}{}^2}} = 0,7\times 1 \Rightarrow \omega_{-3\ \text{dB}-\text{BF}} = 1\text{rad/s}$$

La bande passante à $-3$ dB est donc :

$$\omega \in ]0; 1\ rad.s^{-1}$$

**Remarque**

Dans ce cas, on aurait bien entendu pu (dû) utiliser un résultat connu dans le cas du système du premier ordre :

$$G_{dB}\left(\omega_{\text{cassure}}\right) = -3 \text{ dB avec } \omega_{\text{cassure}} = \frac{1}{\tau}$$

- Cas 2 : $H_2(p) = \dfrac{60}{(p+2)\cdot(p+6)} = \dfrac{5}{\left(\frac{1}{2}\cdot p+1\right)\cdot\left(\frac{1}{6}p+1\right)} = \dfrac{K_2}{\left(\frac{1}{2}\cdot p+1\right)\cdot\left(\frac{1}{6}p+1\right)}$

On a :

$$G\left(\omega_{-3dB-BF}\right) = \frac{5}{\sqrt{1+(\frac{\omega_{-3dB-BF}}{6})^2}\sqrt{1+(\frac{\omega_{-3dB-BF}}{2})^2}}$$

On cherche donc $\omega_{-3dB-BF}$ tel que :

$$G\left(\omega_{-3dB-BF}\right) = \frac{5}{\sqrt{1+(\frac{\omega_{-3dB-BF}}{6})^2}\sqrt{1+(\frac{\omega_{-3dB-BF}}{2})^2}} = 0,7\times 5 \Rightarrow \omega_{-3dB-BF} = 1,82 \text{ rad/s}$$

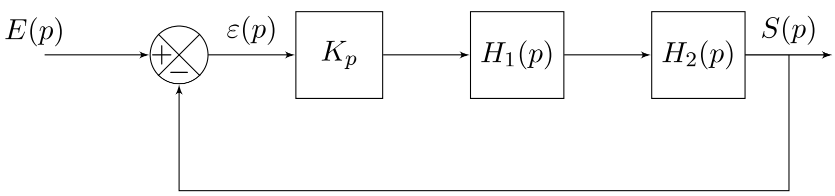
La bande passante à $-3$ dB est donc : $\omega \in 0, 1,82 \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

**Remarque**

Dans ce cas, on aurait pu penser que la pulsation de coupure à $-3$ dB correspondait à la pulsation de cassure $\left(\frac{1}{6}\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\right)$ la plus faible parmi celles des deux premiers ordres dont $\text{H}_2(p)$ est le produit. Cela serait vrai si la deuxième cassure était bien plus éloignée (au moins une décade) de la première.

## 6 Exercice 6 - Réglage d'un correcteur proportionnel

On propose le modèle schéma-bloc suivant :



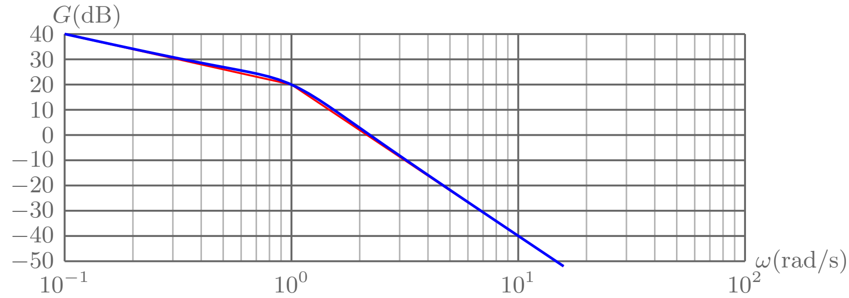

On donne :

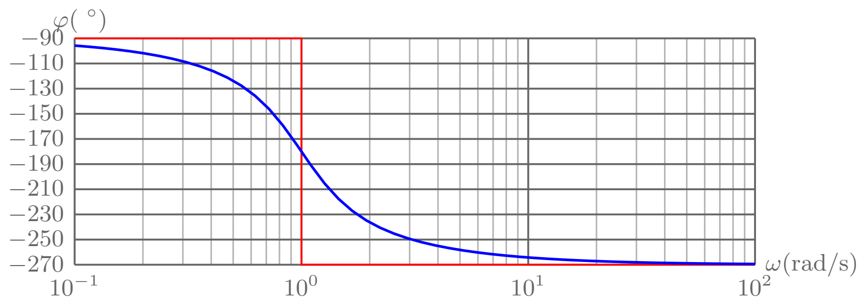
- $H_1(p) = \dfrac{K_1}{1+p+p^2}$ avec $K_1 = 10$
- $\text{H}_2(p)$ est un intégrateur pur
- $K_p$ est un correcteur proportionnel

Extrait du cahier des charges :

| Performance | Critère et niveau associés |
|---|---|
| Stabilité | $M\varphi = 45°$ et $M_G = 10$ dB |
| Précision | Erreur de position $< 10\%$ |
| Rapidité | Bande passante à $-3$ dB $= [0, 1\text{rad/s}]$ |

**Question 1** Tracer le diagramme de Bode la FTBO pour $K_p = 1$.





**Question 2** Déterminer les marges de stabilité pour $K_p = 1$. Conclure.

La marge de phase est : $M_\varphi = 180 + \varphi\left(\omega_{COdB}\right) = 180 + \arg\left(H_{BO}\left(j\omega_{C-OdB}\right)\right)$

Avec $\omega_{C-OdB}$, la pulsation telle que :

$$20\log\left|H_{BO}\left(j\omega_{C-OdB}\right)\right| = 0 \Rightarrow \left|H_{BO}\left(j\omega_{C-OdB}\right)\right| = 1 \Rightarrow \omega_{C-OdB} = 2,218\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \mid$$

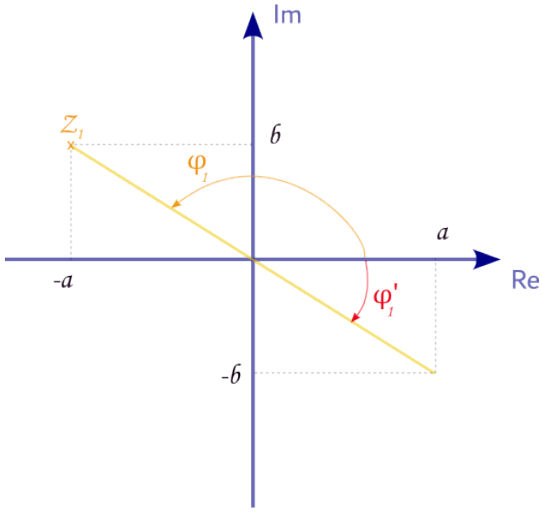
Si besoin : $\left|H_{BO}\left(j\omega_{C-OdB}\right)\right| = \frac{10}{\omega_{C-OdB}\sqrt{\left(1-\omega_{C-OdB}{}^2\right)^2+\omega_{C-OdB}{}^2}}$

Ce que l'on peut vérifier graphiquement sur le diagramme de Bode tracé précédemment.

On a donc : $M_\varphi = -60,49° < 0$

Si besoin : $\arg\left(H_{BO}\left(j\omega_{COdB}\right)\right) = -90 - \left(\arctan\left(\frac{2,218}{1-2,218^2}\right) + 180\right)$

Attention, on est ici dans le cas où on l'argument d'un nombre complexe dont la partie réelle est négative.




Il faut donc penser à rajouter 180° à la valeur que renvoi la calculatrice lors du calcul de l'arc tangente :

Ou, tout simplement, utiliser la fonction argument de sa calculatrice.

Dans tous les cas, il faut contrôler graphiquement le résultat obtenu !

$$Z_1 = -a + j \cdot b \Rightarrow \arg(Z_1) = \text{artan}\left(\frac{b}{-a}\right) = {\varphi_1}'$$
$$\varphi_1 = {\varphi_1}' + 180°$$

Partie réelle négative → ajouter 180°

La marge de gain est non définie. En effet, $\forall \omega > \omega_{c0dB}$, on a $\varphi(\omega) < 180°$

C'est ce que l'on constate graphiquement mais que l'on peut aussi vérifier simplement car $\omega_{-180°}$ peut être déterminé sans calcul. En effet, la FTBO est le produit d'un intégrateur ($\varphi(\omega) = -90° \forall \omega$) et d'un modèle usuel du second ordre avec $\omega_0 = 1 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ($\varphi(\omega_0) = -90°$). On a donc $\omega_{-180°} = 1 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

On constate qu'une des marges de stabilité est négative, le système est donc instable.

**Question 3** Déterminer la valeur de $K_p$ qui permet de régler le système de façon à respecter la marge de phase du cahier des charges. Déterminer la marge de gain correspondante. Conclure.

Graphiquement : on regarde la valeur du gain lorsque la phase vaut $-135°$, et on abaisse d'autant la courbe.

Ici : graphiquement on doit baisser de 25 dB soit, $K'_{BO} = K_p \cdot K_{BO}$ avec $K_p = 10^{\frac{-25}{20}} \simeq 0,056$.

Avec cette valeur de $K_p$, on a alors : $M_G = 5,35dB$ et $\omega_{c-0 \text{ dB}} \simeq 0.6$ rad/s.

Avec ce réglage, le système est stable, mais insuffisamment au regard des exigences du cahier des charges.

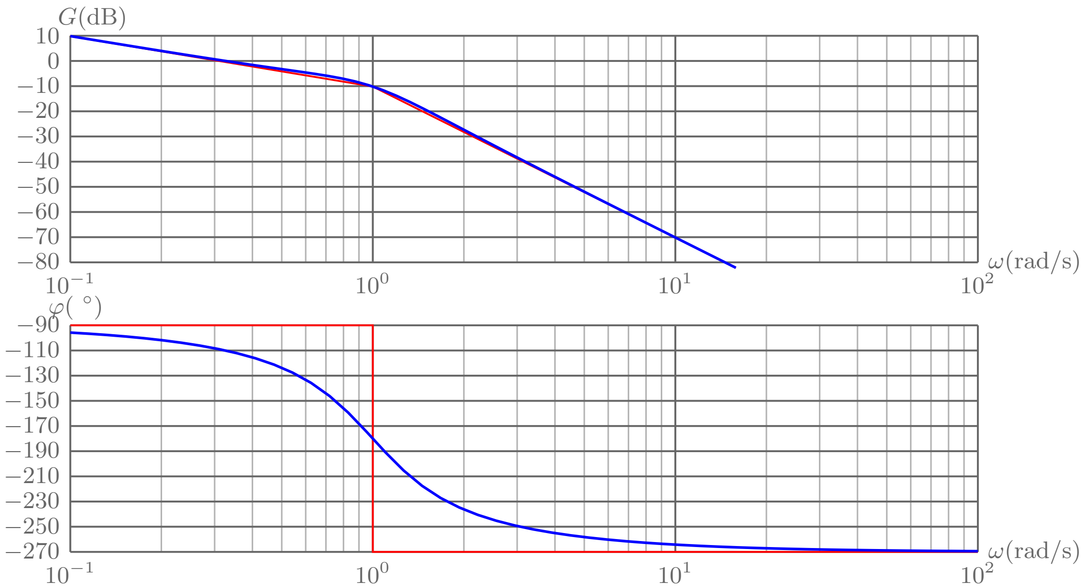
**Question 4** Déterminer la valeur de $K_p$ qui permet de régler le système de façon à respecter la marge de gain du cahier des charges. Déterminer la marge de phase correspondante. Graphiquement : on veut que le gain de la fonction de transfert soit égal à $-10$ dB lorsque la phase vaut $-180°$. Il nous faut alors abaisser la courbe de 30 dB, soit : $K'_{BO} = K_p \cdot K_{BO}$ avec $K_p = 10^{\frac{-30}{20}} \simeq 0,031$

Avec cette valeur de $K_p$, on alors une pulsation de coupure $\omega_{c0dB} = 0,333 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

On a alors une marge de phase : $M_\varphi = 70°$

Avec ce réglage, la performance de stabilité du cahier des charges est assurée.

Le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée du système ainsi corrigé est donné ci-dessous :




**Question 5** Conclure quant aux performances du système ainsi réglé.

Avec ce réglage, la performance de stabilité du cahier des charges est assurée. C'est ce qui a été montré précédemment.

En ce qui concerne l'erreur de position, elle est nulle puisque la FTBO est de classe 1.

La bande passante à - 3 dB, qu'il faut mesurer sur le diagramme de Bode de la $FTBF$, est $]0, 0,8\text{rad/s}]$, ce qui est légèrement inférieur aux exigences du cahier des charges.