Corrigé du devoir en temps libre n°7

Problème I

1. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire résulte des propriétés de la norme infinie sur l'ensemble des fonctions bornées de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ puisque les fonctions polynomiales sont continues et donc bornées sur $[0;1]$. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ tel que $\|\mathrm{P}\|_\infty = 0$. On a $\mathrm{P}(t) = 0$ pour tout $t \in [0;1]$ d'où une infinité de racines pour P ce qui prouve sa nullité. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } \|\cdot\|_\infty \text{ est une norme sur E.}}$$

2. Pour $i \in [\![1;p]\!]$, les applications $\varphi_i : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(x_i)$ sont linéaires avec E espace de dimension finie. Ces applications sont donc continues et on a

$$\mathrm{A} = \bigcap_{i=1}^{p} \varphi^{-1}([-1;1])$$

intersection d'images réciproques d'un fermé par des applications continues d'où la fermeture de A. On suppose $p < n$. On pose

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}_k = k \prod_{i=1}^{p} (\mathrm{X} - x_i)$$

La suite $(\mathrm{P}_k)_k$ est clairement à valeurs dans A et on a pour k entier

$$\|\mathrm{P}_k\|_\infty = k \|\prod_{i=1}^{p} (\mathrm{X} - x_i)\|_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$$

ce qui prouve que la partie A est non bornée. On suppose $p \geqslant n$. Notant $\mathscr{L} = (\mathrm{L}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la famille des polynômes de Lagrange associés à $x_1, \ldots, x_n$, *i.e.* vérifiant $\mathrm{L}_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, un polynôme $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ s'écrit $\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(x_i)\mathrm{L}_i$ d'où par inégalité triangulaire

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{A} \qquad \forall t \in [0;1] \qquad |\mathrm{P}(t)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(x_i)\mathrm{L}_i(t)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{P}(x_i)|\,|\mathrm{L}_i(t)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|\mathrm{L}_i\|_\infty$$

ce qui prouve le caractère borné de A. Comme l'espace E est de dimension finie, on conclut

$$\boxed{\text{La partie A est un compact de E si et seulement si } p \geqslant n.}$$

3. La suite $(\mathrm{P}_k)_k$ est à valeurs dans A à partir d'un certain rang. Soit φ extractrice telle que $(\mathrm{P}_{\varphi(k)})_k$ converge vers un polynôme $\mathrm{P} \in \mathrm{A}$. Il existe une telle extractrice par compacité de A. On a $\|\mathrm{P}_{\varphi(k)} - \mathrm{P}\|_\infty \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et donc en particulier

$$\forall i \in [\![1;n]\!] \qquad \left|\mathrm{P}_{\varphi(k)}(x_i) - \mathrm{P}(x_i)\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

d'où
$$\forall i \in [\![1;n]\!] \qquad \mathrm{P}(x_i) = 0$$

Le polynôme P est de degré au plus $n-1$ et admet n racines distinctes d'où $\mathrm{P} = 0$. Ainsi, la suite $(\mathrm{P}_k)_k$ à valeurs dans A compact à partir d'un certain rang admet $\mathrm{P} = 0$ pour unique valeur d'adhérence. On conclut

$$\boxed{\|\mathrm{P}_k\|_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} 0}$$

Variante : En considérant la norme $\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{L}}$, on a clairement $\|\mathrm{P}_k\|_{\infty,\mathscr{L}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ et par équivalence des normes en dimension infinie, on retrouve le résultat attendu.

Problème II

1. Par linéarité de l'intégrale et inégalité triangulaire classique, l'application $\|\cdot\|_1$ vérifie l'homogénéité et l'inégalité triangulaire. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ tel que $\|\mathrm{P}\|_1 = 0$. La fonction $t \mapsto |\mathrm{P}(t)|$ est continue, positive et par séparation de l'intégrale, il vient $\mathrm{P}(t) = 0$ pour tout $t \in [\,0\,;1\,]$ d'où une infinité de racines pour P ce qui prouve sa nullité. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } \|\cdot\|_1 \text{ est une norme sur E.}}$$

2. L'ensemble A est clairement non vide. L'application $\varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(0)$ est linéaire dans E espace de dimension finie. Par conséquent, c'est une application continue et on a

$$\mathrm{A} = \varphi^{-1}([\,0\,; +\infty\,[)$$

image réciproque d'une fermé par une application continue. Ainsi

$$\boxed{\text{L'ensemble A est un fermé non vide de E.}}$$

La suite $(\mathrm{P}_k)_k$ avec $\mathrm{P}_k = k$ pour k entier est à valeurs dans E et non bornée ce qui prouve que

$$\boxed{\text{L'ensemble A n'est pas un compact de E.}}$$

3.(a) Par caractérisation séquentielle d'une borne inférieure

$$\boxed{\exists (\mathrm{Q}_k)_k \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}} \quad | \quad \|\mathrm{P} - \mathrm{Q}_k\|_1 \xrightarrow[k \to +\infty]{} \mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{A})}$$

3.(b) Par inégalité triangulaire, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \|\mathrm{Q}_k\| \leqslant \|\mathrm{Q}_k - \mathrm{P}\| + \|\mathrm{P}\| = \mathrm{O}(1)$$

La suite $(\mathrm{Q}_k)_k$ est donc à valeurs dans une boule fermée $\mathrm{B}_f(0, \mathrm{R})$ avec $\mathrm{R} \geqslant 0$, compacte dans l'espace de dimension finie E. Par conséquent, on dispose de φ extractrice telle que

$$\mathrm{Q}_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \mathrm{Q} \in \mathrm{B}_f(0, \mathrm{R})$$

La suite $(\mathrm{Q}_{\varphi(k)})_k$ est à valeurs dans A et par fermeture de cet ensemble, on a $\mathrm{Q} \in \mathrm{A}$. Enfin, par continuité de la norme

$$\|\mathrm{P} - \mathrm{Q}_{\varphi(k)}\|_1 \xrightarrow[k \to +\infty]{} \|\mathrm{P} - \mathrm{Q}\|_1$$

On conclut
$$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{Q} \in \mathrm{A} \text{ tel que } \mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{A}) = \|\mathrm{P} - \mathrm{Q}\|_1.}$$

Problème III

1. Soit n entier. Si $a_n = a_{n+1}$, on a

$$a_{n+1} + r_{n+1} u \in \mathrm{B}_f(a_{n+1}, r_{n+1}) \subset \mathrm{B}_f(a_n, r_n) = \mathrm{B}_f(a_{n+1}, r_n)$$

d'où
$$\|a_{n+1} - r_{n+1} u - a_{n+1}\| = r_{n+1} \leqslant r_n$$

Si $a_{n+1} \neq a_n$, on pose
$$u = \frac{a_{n+1} - a_n}{\|a_{n+1} - a_n\|}$$

On a
$$a_{n+1} + r_{n+1} u \in \mathrm{B}_f(a_{n+1}, r_{n+1}) \subset \mathrm{B}_f(a_n, r_n)$$

d'où
$$\begin{aligned} \|a_{n+1} + r_{n+1} u - a_n\| &= \left\| \left(\|a_{n+1} - a_n\| + r_{n+1}\right) \frac{a_{n+1} - a_n}{\|a_{n+1} - a_n\|} \right\| \\ &= \|a_{n+1} - a_n\| + r_{n+1} \leqslant r_n \end{aligned}$$

et en particulier $$r_{n+1} \leqslant r_n$$

On en déduit que la suite $(r_n)_n$ décroît et comme elle est positive, avec le théorème de limite monotone, on conclut

$$\boxed{\text{La suite } (r_n)_n \text{ est décroissante et on a } r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} r \geqslant 0.}$$

2. La suite $(a_n)_n$ est à valeurs dans $\mathrm{B}_f(a_0, r_0)$ fermé borné donc compact de l'espace E de dimension finie. Par conséquent, on dispose de φ extractrice telle que $a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \in \mathrm{E}$. Pour p entier, on a $\varphi(p) \geqslant p$ ce qui prouve que la suite $(a_{\varphi(n)})_{n\geqslant p}$ est à valeurs dans $\mathrm{B}_f(a_p, r_p)$. Par fermeture de $\mathrm{B}_f(a_p, r_p)$, on a

$$a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \in \mathrm{B}_f(a_p, r_p)$$

et ce pour tout $p \in \mathbb{N}$ d'où

$$\boxed{\text{On dispose de } \varphi \text{ extractrice telle que } a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_f(a_n, r_n)}$$

3. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Quitte à échanger les rôles, supposons $p > n$. Si $a_n = a_p$, l'inégalité est triviale. Supposons $a_n \neq a_p$. On suit une idée voisine de celle proposée dans la première question. On pose

$$u = \frac{a_p - a_n}{\|a_p - a_n\|}$$

On a $$a_p + r_p u \in \mathrm{B}_f(a_p, r_p) \subset \mathrm{B}_f(a_n, r_n)$$

d'où $$\|a_p + r_p u - a_n\| = \|\left(\|a_p - a_n\| + r_p\right)\frac{a_p - a_n}{\|a_p - a_n\|}\| = \|a_p - a_n\| + r_p \leqslant r_n$$

autrement dit $$\|a_p - a_n\| \leqslant r_n - r_p$$

Par symétrie des rôles, on conclut

$$\boxed{\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \qquad \|a_n - a_p\| \leqslant |r_n - r_p|}$$

4. On dispose de φ extractrice telle que $a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Par inégalité triangulaire, il vient pour n entier

$$\|a - a_n\| \leqslant \|a - a_{\varphi(n)}\| + \|a_{\varphi(n)} - a_n\| \leqslant \|a - a_{\varphi(n)}\| + \left|r_{\varphi(n)} - r_n\right|$$

La suite $(r_{\varphi(n)})_n$ est extraite de la suite convergente $(r_n)_n$ et il s'ensuit que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_f(a_n, r_n)$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|x - a_n\| \leqslant r_n$$

Faisant tendre $n \to +\infty$, il vient avec la continuité de la norme

$$\|x - a\| \leqslant r$$

Réciproquement soit $x \in \mathrm{B}_f(a, r)$. On a établi

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \qquad \|a_n - a_p\| \leqslant |r_n - r_p|$$

Si on fixe n et qu'on fait tendre $p \to +\infty$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|a_n - a\| \leqslant |r_n - r| = r_n - r$$

Puis, pour n entier $\qquad \|x-a_n\| \leqslant \|x-a\| + \|a-a_n\| \leqslant r + r_n - r = r_n$

On conclut $$\boxed{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_f(a_n, r_n) = \mathrm{B}_f(a, r)}$$